NOM : Dad
PRENOM : Redfray

Date : 4/10/07
Groupe : 0+

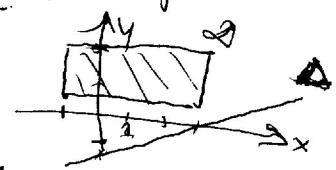
Analyse : Feuille de réponses du TP 4
Fonctions de deux variables : optimisation

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

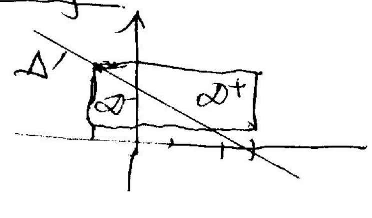
Exercice 1. :

1. Indiquer si la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ rencontre le domaine $\mathcal{D} = [-1,\ 3] \times [\frac{1}{2},\ 2]$ ou si celui-ci est situé dans l'un des demi plans qu'elle borde (faire un dessin).
2. Si x et y sont deux réels tels que $-1 \le x \le 3$ et $0,5 \le y \le 2$, l'inégalité $0,5x - y \ge 1,5$ est-elle toujours satisfaite ? En est-il de même pour l'inégalité $0,5x - y \ge 0,5$?
3. Etudier le signe de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2}$ sur $\mathcal{D}$. Même question pour la fonction $g(x,y) = \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}$.

1. On voit sur le dessin que le rectangle $\mathcal{D}$ est entièrement contenu dans le demi-plan supérieur bordé par la droite Δ d'équation $y = x/2 - 3/2$.



2. L'inégalité $0.5x - y \geq 1.5$ signifie que le point $M := (x,y)$, qui est dans $\mathcal{D}$, est en-dessous de Δ. On voit bien que cette condition n'est jamais satisfaite. L'inégalité $0.5x - y \geq 0.5$ est parfois satisfaite ($x = 3$, $y = 1/2$) et parfois non ($x = -1$, $y = 2$).
3. On vient de voir que la fonction f est toujours négative sur $\mathcal{D}$. La fonction g s'annule sur la droite Δ' d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3/2$ qui sépare $\mathcal{D}$ en deux régions : $\mathcal{D}^+$ contenant $(3,2)$ où g est positive, $\mathcal{D}^-$ contenant $(-1, \frac{1}{2})$ où g est négative.



Exercice 4. : Trouver la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ sur le domaine $x \le 0$, $y \le 0$ et $x + y \ge -3$. Même exercice pour $g(x,y) = 1 + xy - x - y$ sur $x^2 \le y \le 4$.

Pour trouver les points critiques de f, je résous le système $S : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Je trouve un seul point $(-1,-1)$ dans cette intersection de deux droites. Ce point c est bien dans le triangle donné T et j'ai $f(c) = -1$.

Pour $y = 0$, j'ai $f(x,0) = x^2 + x$. Sur $[-3, 0]$, son maximum est 6 et son minimum $-\frac{1}{4}$ est atteint en $-\frac{1}{2}$.

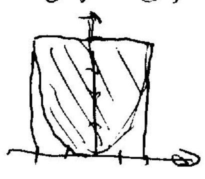
Pour $x = 0$, on a le résultat symétrique.

Sur le troisième côté du triangle, j'ai $y = -x - 3$.

J'ai $f(x, -x-3) = (x+y)^2 - 3xy + x + y = 9 - 3x(-x-3) - 3$
$= 3x^2 + 9x + 6 = 3(x^2 + 3x + 2)$

Sur $[-3, 0]$, cette fonction atteint son maximum 6 en 0 et en -3 et son minimum $-\frac{3}{4}$ en $-\frac{3}{2}$.

La plus petite valeur de f est donc $\underline{\underline{-1}}$ et la plus grande est $\underline{\underline{6}}$.



Pt critique : $(1,1)$, valeur $g(c) = 0$.
$g_1(x) = g(x, 4) = 3x - 3$ sur $[-2, +2]$: $\max g_1 = 3$, $\min g_1 = -9$
$g_2(x) = g(x, x^2) = x^3 - x^2 - x + 1$

Exercice 5. (à rédiger sur une feuille séparée) : Montrer qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ dérivable et concave sur $\mathbf{R}$ ne peut avoir qu'un seul point critique et qu'il s'agit alors forcément d'un maximum global. (Indication : on pourra utiliser le fait qu'une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois). Enoncer le théorème analogue pour une fonction convexe.

Les points critiques de g_2 sont 1 et $-\frac{1}{3}$ et $g_2(1) = 0$
$g_2(\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$ $g_2(-2) = -9$ $g_2(2) = 3$. D'où $\max g = 3$ $\min g = -9$

Exercice 2. :

1. Vérifier par le calcul que le graphe de la fonction $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ est situé au dessus de son plan tangent passant par le point $(1,1,2)$ (figure 2 du cours 2). Même question pour le plan tangent passant par le point (1,0,3).
2. Vérifier par le calcul que le graphe de la fonction $g(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ n'est pas situé au dessus du plan tangent passant par le point $(2,3,13)$. Cette fonction est-elle convexe? concave?

1. J'ai $f'_x(x,y) = 2x$ et $f'_y(x,y) = -2y$, d'où la linéarisée en $(1,1)$: $L := (x,y) \longmapsto 2 - 2(x-1) - 2(y-1)$

ou encore $(x,y) \mapsto -2x - 2y + 6$.

Je dois prouver que f est inférieure à L.

Pour ça, je prends x et y quelconques et je calcule

$$L(x,y) - f(x,y) = -2x - 2y + 6 + x^2 + y^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$
$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.$$

2. Le calcul de la linéarisée de g en $(2,3)$ donne $L := (x,y) \longmapsto 13x - 13$.

Pour x et y quelconques, j'ai

$$g(x,y) - L(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 - 13x + 13.$$

Cette quantité est négative par exemple en $(0,4)$, ce qui signifie qu'en ce point le graphe de g est en-dessous du plan tangent en $(2,3)$.

La fonction n'est donc pas convexe.

Elle n'est pas concave non plus, puisqu'en $(0,0)$ le graphe est au-dessus de notre plan tangent.

Exercice 3. : Trouver les points critiques de $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ et indiquer leur nature (maximum, minimum, selle, ..) . Même exercice pour $g(x,y) = \frac{x^2y - 8x + y}{xy}$.

Je calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 3y^2.$$

Les points critiques de f sont donc les solutions du système

$$S : \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Par substitution, je vois qu'une solution (x,y) de S vérifie $x = x^4$, qui n'a que 0 et 1 comme solutions. De $y = x^2$, je déduis que $\boxed{(0,0) \text{ et } (1,1)}$ sont les seules solutions possibles, et le calcul montre que ce sont bien deux solutions.

Pour la nature du point critique, je calcule :

$D(0,0) = -9$ donc $(0,0)$ est un point selle.

$D(1,1) = 27$ donc $(1,1)$ est un extremum local.

Comme $f''_{x^2}(1,1)$ est égal à 6, $(1,1)$ est un minimum local.

Pour g, j'ai $g(x,y) = x - \frac{8}{y} - \frac{1}{x}$. D'où

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{8}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-16}{y^3}.$$ J'ai calculé tout ça pour rien puisque $\frac{\partial g}{\partial y}$ ne s'annule pas : il n'y a pas de point critique.