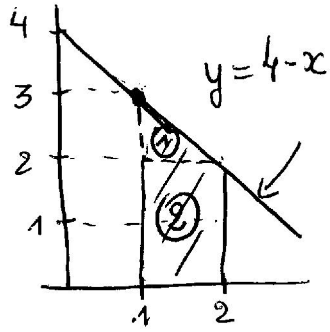
NOM : Corrigé — Date :
PRENOM : — Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 6
Intégrales et primitives

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP. Les exercices supplémentaires ne sont à faire que par ceux qui ont terminé la feuille avant la fin de la séance.

Exercice 1. : Calcul d'aires avec une intégrale

1. L'intégrale $\int_1^2 (4-x)dx$ représente l'aire d'un trapèze. Faire un dessin puis calculer cette aire de deux façons différentes.



1ère façon :
Aire = aire du rectangle (2) + aire du triangle (1)

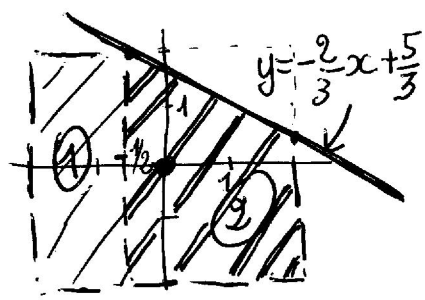
$$= 1\times 2 + \frac{1\times 1}{2} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

2e façon

$$\int_1^2 (4-x)\,dx = \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(8-\frac{4}{2}\right)-\left(4-\frac{1}{2}\right) = 6-\frac{7}{2} = \frac{12-7}{2} = \frac{5}{2}$$

2. Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes puis calculer son aire de deux façons différentes

$$|x|<2\ ,\ |y|<2\ ,\ 2x+3y<5$$



Le demi plan $2x+3y<5$ est le demi plan bordé par la droite $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ et contenant l'origine $(0,0)$.
La région hachurée est la somme du rectangle (1) et du trapèze (2).

1ère façon rectangle (1) : $\frac{3}{2}\times 4 = 6$ trapèze (2) : $\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\left(4+\frac{7}{3}\right)=\frac{95}{12}$

2e façon rectangle + trapèze

$$= \int_{-2}^{-1/2}[2-(-2)]\,dx + \int_{-1/2}^{2}\left[\left(-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)-(-2)\right]dx$$

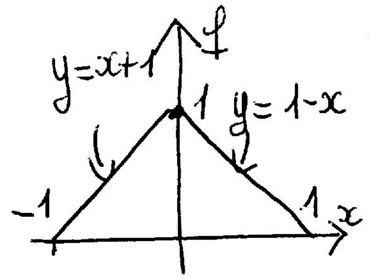
$$= \left[4x\right]_{-2}^{-1/2} + \left[-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x\right]_{-1/2}^{2}$$

$$= -\frac{4}{2}-(-8)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{22}{3}+\frac{1}{12}+\frac{11}{6}\right)$$

$$= 6+\frac{95}{12}$$

Exercice 2. :

1. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle vérifie $f \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 1$. Vérifier que la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité (tracer son graphe).



- Lorsque $x \in [-1, 0[$, $x+1 \geq 0$ et lorsque $x \in [0, 1]$, $1-x \geq 0$

Donc $f \geq 0$ sur $[-1, 1]$

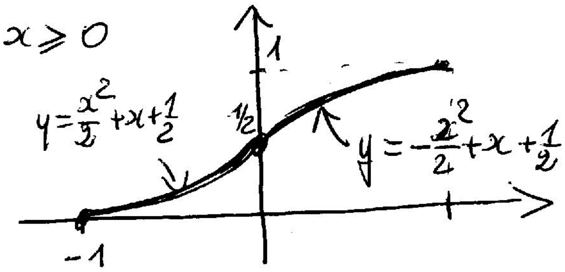
- $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_0^1 (1-x)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= 0 - \left(\frac{1}{2}-1\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

2. Sa fonction de répartition est définie par $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt (= \mathbb{P}(\{X \leq x\}))$. Soit $x_0 \in [-1, 1]$. Dessiner F puis calculer les intégrales suivantes en fonction de ~~$f(x_0)$:~~ $a = \int_{-1}^{x_0} f(t)dt$.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x} & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



$\int_{x_0}^{1} f(x)dx =$

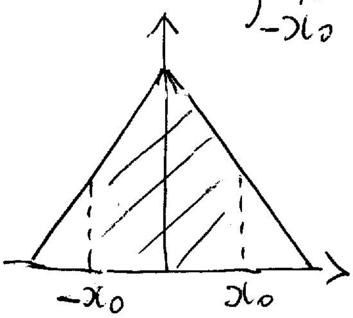
$$\int_{x_0}^{1} f(x)dx = \int_{x_0}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$= -\int_{-1}^{x_0} f(x)dx + 1 \quad \left(\text{rel. Chasles} + \int_{-1}^{1} f(x)dx = 1\right)$$

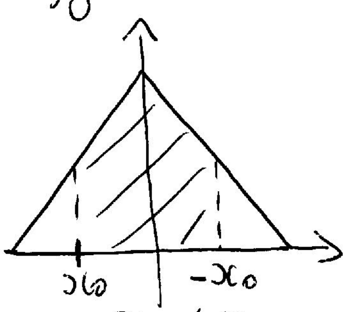
$$= 1 - a$$

$\int_0^{x_0} f(x)dx =$ $\int_0^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{x_0} f(x)dx = -\frac{1}{2} + a$

$\int_{-x_0}^{x_0} f(x)dx =$ $\int_{-x_0}^{0} f(x)dx + \int_0^{x_0} f(x)dx = 2\int_0^{x_0} f(x)dx$ (dessin)



$x_0>0$



$x_0<0$

$$= \begin{cases} 2\left(-\frac{1}{2}+a\right) & \text{si } x_0 > \\ -2\left(-\frac{1}{2}+a\right) & \text{si } x_0 < \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2a - 1 & \text{si } x_0 > \\ -2a + 1 & \text{si } x_0 < \end{cases}$$

Exercice 3. : Changement de variable

1. Sachant que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$.

De $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, on déduit $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Donc :

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x \, dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

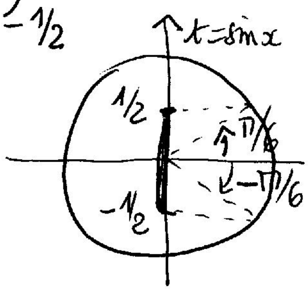
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}$$

Calculer, en utilisant le changement de variable $t = \sin x$, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_{-\pi/6}^{+\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 x} \, (-\cos x) \, dx$$



$$\begin{cases} t = \sin x \quad \text{donc} \quad dt = -\cos x \, dx \\ t = -1/2 \iff x = -\pi/6 \\ t = 1/2 \iff x = \pi/6 \end{cases}$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{\cos^2 x} \, (-\cos x) \, dx$$

pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$
$|\cos x| = \cos x$
car $\cos x > 0$

$$= -\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$$ d'après la question 1.

Exercice 4 : entrainement à la démonstration : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Rappelons que <u>f impaire</u> signifie que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

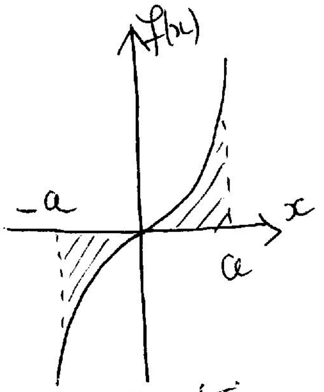
Calculons l'intégrale $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ et montrons qu'elle est nulle.

$$(*) \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{par la relation de Chasles}$$

Effectuons un changement de variable $x = -t$ dans la 1^e^ intégrale

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} -f(-t)\,dt$$

$$\begin{cases} x = -t \text{ donc } dx = -dt \\ x = -a \Leftrightarrow t = a \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$$



une fonction impaire est symétrique par rapport à (0,0)

$$= \int_{a}^{0} -(-f(t))\,dt \quad \text{puisque } f \text{ est impaire}$$

$$= \int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(échange de l'ordre des bornes + $t \to x$ car "variable muette")

Finalement $(*)$ s'écrit

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Exercices suplémentaires :

1. Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes puis calculer son aire : $x > 0$, $y > 0$ et $(y+1)e^x < 3$.
2. Pour la densité f de l'exercice 2, calculer les deux intégrales suivantes qui représentent l'espérance et la variance d'une "variable aléatoire X" ayant cette densité, $\mathbb{E}X = \int_{-1}^{+1} xf(x)dx$ et $\operatorname{Var} X = \int_{-1}^{+1} x^2 f(x)dx$.
3. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln s}{s^2} ds$ au moyen du changement de variable $s = e^t$.
4. Calculer par intégration par partie les primitives de $f(x) = x \sin x$, $g(x) = x \operatorname{ch} x$ et de $h(x) = x^2 e^x$.
5. On appelle "fonction d'erreur" la fonction définie par $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2)dx$. Exprimer les intégrales suivantes $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-x^2/2)dx$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t x\exp(-x^2/2)dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t x^2 \exp(-x^2/2)dx$ (que l'on appelle des *intégrales gaussiennes*) en fonction de la fonction d'erreur.