

Modèles Mathématiques Discrets  
pour la Finance et l'Assurance

Marc et Francine DIENER

28 mars 2010



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Prix et couverture d'une option d'achat</b>	<b>5</b>
1.1	Evaluation du prix dans un modèle à une étape . . . . .	5
1.2	Modèle à deux étapes : couverture dynamique. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein</b>	<b>11</b>
2.1	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	11
2.2	Construction du portefeuille de couverture . . . . .	12
2.3	Probabilité risque neutre et formule fondamentale . . . . .	13
2.4	Hypothèses du modèle . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Marchés aléatoires. Filtration et information</b>	<b>17</b>
3.1	Définitions et exemple du modèle CRR . . . . .	17
3.2	L'ensemble $\Omega$ , ou comment indexer tous les avenir possibles . . . . .	18
3.3	Caractériser ce qui sera connu et ce qui restera aléatoire . . . . .	19
3.3.1	La relation $\tilde{\cdot}$ et la partition $\mathcal{Q}_t$ de $\Omega$ . . . . .	19
3.3.2	La tribu $\mathcal{F}_t^S$ . . . . .	19
3.3.3	La tribu associée à une v.a. . . . .	20
3.4	$\mathcal{F}_t^S$ -mesurabilité . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Espérance conditionnelle</b>	<b>21</b>
4.1	Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement . . . . .	21
4.2	Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu . . . . .	21
4.3	L'espace euclidien $L^2(\Omega)$ . . . . .	22
4.4	Application au calcul de prix d'options . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Martingales, arbitrage et complétude</b>	<b>25</b>
5.1	Martingales . . . . .	25
5.2	Marché et "pertes et profits" d'un portefeuille . . . . .	27
5.3	Marchés sans arbitrage . . . . .	28
5.4	Marchés complets et non complets . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Options américaines</b>	<b>31</b>
6.1	Calcul du prix par récurrence rétrograde . . . . .	31
6.2	Théorème d'arrêt optimal . . . . .	32
6.3	Stratégie de couverture avec consommation . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Options barrières</b>	<b>35</b>
7.1	Définitions et exemples . . . . .	35
7.2	Mesurabilité et temps d'arrêt . . . . .	36
7.3	Calcul du prix d'une option DIC . . . . .	37
7.4	Evaluation par le principe d'André . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Black-Scholes comme limite de CRR</b>	<b>41</b>
8.1	La formule de Black-Scholes . . . . .	41
8.2	Limite du prix CRR . . . . .	41
8.3	Convergence vers Black-Scholes . . . . .	43
8.4	Vitesse de convergence . . . . .	44

<b>9</b>	<b>Le modèle de Ho et Lee</b>	<b>47</b>
9.1	Actifs à flux déterministes . . . . .	47
9.2	Taux aléatoires . . . . .	48
9.2.1	Where are the risks? . . . . .	48
9.2.2	Courbes de taux et structure par terme . . . . .	49
9.3	Le modèle de Ho et Lee pour les zéro-coupons . . . . .	50
9.3.1	Un model à trois paramètres : $\pi$ , $\delta$ , et $n$ . . . . .	51
9.4	Exemples de produits dérivés de taux . . . . .	52
<b>A</b>	<b>Exercices</b>	<b>55</b>
A.1	Les trajectoires d'un modèle à $n$ étapes . . . . .	55
A.2	Les trajectoires du call d'un modèle à $n$ étapes . . . . .	56
A.3	Calcul de prix par espérance conditionnelle . . . . .	57
A.4	Le Delta de couverture . . . . .	58
A.5	Options américaines . . . . .	59
A.6	La formule de Black et Scholes; convergence des prix CRR vers BS . . . . .	61
A.7	Calcul de prix d'options barrière . . . . .	61
A.8	Modèles de Ho et Lee, et produits de taux d'intérêts . . . . .	63
A.9	Incidence du paiement d'un dividende sur le prix d'une action et d'une option . . . . .	66
A.10	Examen 2006-2007 . . . . .	67
A.11	Examen 2007-2008 . . . . .	67
A.12	Examen 2008-2009 . . . . .	69

# Chapitre 1

## Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

**Définition :** Une *option* d'achat (européenne), encore appelée *call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiement que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'échéance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

### 1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons  $t = 0$  l'instant de souscription de l'option,  $t = T$  son échéance et  $K$  son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur  $S_0$  à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs  $S_T = S_0u$  ou  $S_T = S_0d$  à l'échéance, avec  $0 < d < 1 < u$ . On verra qu'il est naturel de supposer en outre que  $S_0d < K < S_0u$ . Soit  $C_0$  la valeur, à déterminer, du call à l'instant  $t = 0$  ; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si  $S_T$  prendra la valeur  $S_0u$  ou  $S_0d$ , mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si  $S_T = S_0d$ , l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à  $K$ ) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si  $S_T = S_0u$ , l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu  $K$ , soit  $S_0u - K$ , somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture*  $\Pi$ , composé de  $a$  actifs  $S_0$  et de  $b$  unités monétaires, et de choisir sa composition  $a$  et  $b$  de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si  $S_T = S_0d$  et

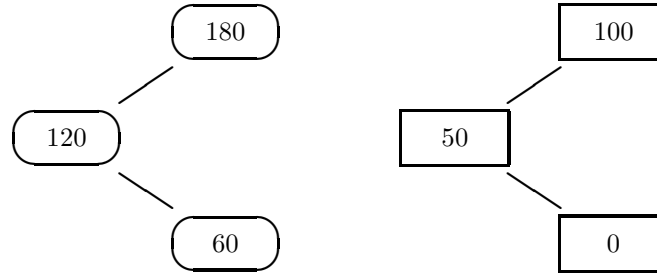


FIG. 1.1 – Un exemple de modèle à une étape

$S_0u - K$  si  $S_T = S_0u$ . Si l'on désigne par  $r$  le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille*  $(a, b)$  devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} aS_0u + be^{rT} &= S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} &= 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues  $a$  et  $b$ ) et on déduit des valeurs de  $a$  et  $b$  obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial  $\Pi_0 = aS_0 + b$ . On peut alors donner à  $C_0$  la valeur  $C_0 = \Pi_0$ .

**Exemple :** Par exemple, si  $S_0 = 120$ ,  $u = 1,5$ ,  $d = 0,5$ ,  $r = 0$ , et  $K = 80$ , la résolution du système (1.1) donne  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = -50$  et donc  $\Pi_0 = 50$ . Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à  $C_0 = 50$ , le vendeur emprunte 50 (car  $b = -50$ ) et achète  $a = \frac{5}{6}$  de  $S_0$  (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit  $150 = \frac{5}{6}180$ , si  $S_T = S_0u$ , et il paiera alors  $100 = 180 - 80$  au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans intérêts puisqu'on a supposé  $r = 0$ ), soit il vaudra  $50 = \frac{5}{6}60$ , si  $S_T = S_0d$ , ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

**Remarque :** Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que  $u \neq d$ , ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à  $t = T$ , il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

**Remarque :** Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix  $K$  (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera  $K - S_0d$  si  $S_T = S_0d$  et 0 si  $S_T = S_0u$ . Plus généralement, si l'on désigne par  $C_T = \varphi(S_T)$  le prix du contrat d'option à l'instant  $T$ , la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

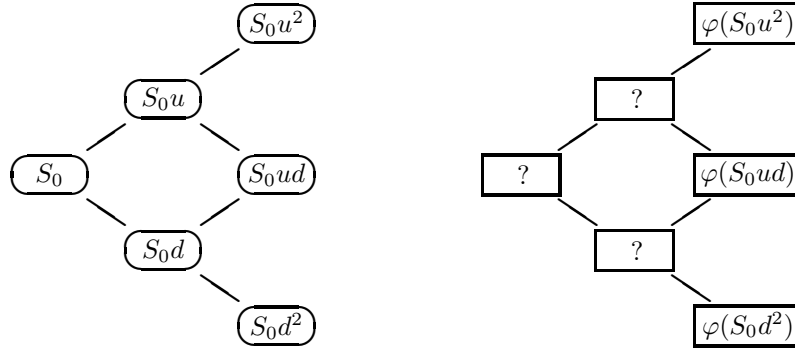
$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \quad (1.2)$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

## 1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture  $(a, b)$  constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre  $t = 0$  et  $t = T$ ) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur  $S_t$  du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent :  $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$  et  $(S_t)$  prenant la valeur  $S_0$  à l'instant initial, l'une des deux valeurs  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$  à l'instant intermédiaire  $t = \delta t$  et l'une des trois valeurs  $S_T = S_0d^2$ ,  $S_T = S_0ud$  ou  $S_T = S_0u^2$  à l'échéance. Pour déterminer la

FIG. 1.2 – Quelles valeurs donner à l’option aux instants  $t = \delta t$  et  $t = 0$  ?

valeur d’un portefeuille de couverture d’une option  $C_T = \varphi(S_T)$ , raisonnons en partant de sa valeur  $\Pi_T$  à l’échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l’option il devra valoir  $\Pi_T = \varphi(S_T)$ , somme due en  $t = T$  par le vendeur à l’acheteur de l’option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par  $S_T$ . En utilisant la même méthode que dans le cas d’un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  que devra prendre le portefeuille à l’instant  $t = \delta t$ , selon que  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$ . Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} aS_0u^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} = \varphi(S_0ud) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} aS_0ud + be^{r\delta t} = \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0d^2) \end{cases} \quad (1.4)$$

Désignons par  $\Pi_{\delta t}^u$  et  $\Pi_{\delta t}^d$  les deux valeurs de  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  obtenues en remplaçant d’une part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (1.3) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0u$  et d’autre part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (1.4) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0d$ . Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l’instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l’option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\begin{cases} aS_0u + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^u \\ aS_0d + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^d \end{cases} \quad (1.5)$$

**Exemple :** Soit un titre valant  $S_0 = 80$  et changeant deux fois de prix avant l’échéance en  $T = 2\delta t$ . Observons que dans l’exemple précédent nous avons, à  $t = \delta t$ ,  $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$  ou  $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$ . Supposons qu’ici  $S$  suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \frac{1}{2}), \quad S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \frac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \quad (1.6)$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \quad (1.7)$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \quad (1.8)$$

Soit une option call de date d’exercice  $T = 2\delta t$  et prix d’exercice  $K = 80$  (lorsque  $K = S_0$ , on dit que c’est une option “à la monnaie”). On suppose, pour simplifier, que le taux d’intérêt monétaire  $r$  est ici égal à 0.

Observons que si  $S_{\delta t} = 120$  nous retrouvons l’exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c’est-à-dire si  $S_{\delta t} = 120$ ), doit valoir

$$\Pi_{\delta t}^u = 50.$$

Qu’en est-il si  $S_{\delta t} = 40$ ? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilités à venir pour  $S_{2\delta t}$  sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d’exercice  $K = 80$ , on aura dans les deux cas  $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$ , et donc  $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$  puisqu’il n’y a plus rien à couvrir dans ce cas.

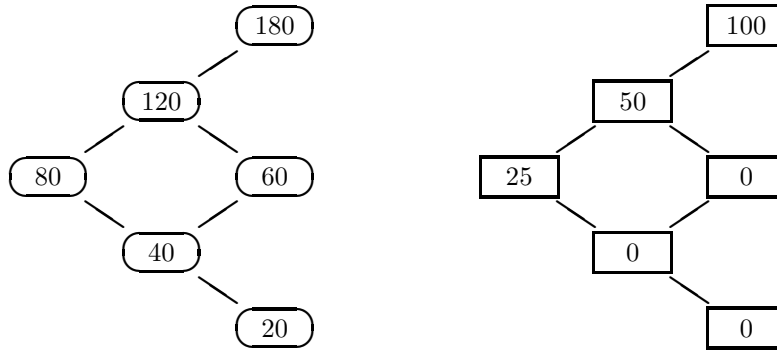


FIG. 1.3 – Deux pattes-d’oie : la première représente l’évolution sur deux étapes d’un actif à dynamique stochastique binaire, avec  $S_0 = 80$  et  $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$ ; la seconde celle du portefeuille de couverture d’un call sur cet actif de prix d’exercice  $K = 80$ .

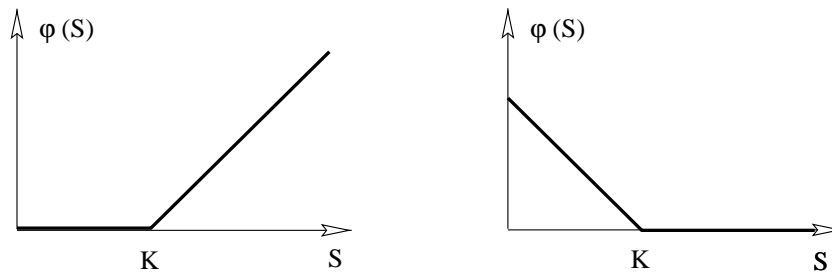


FIG. 1.4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d’un call et d’un put : l’option call est l’option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d’échéance  $T$ , l’actif  $S$  à un prix maximal  $K$ . Si  $S_T \leq K$ , l’option aura donc une valeur nulle pour  $t = T$ . Si  $S_T > K$ , l’option vaudra  $S_T - K$  pour  $t = T$ , c’est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu  $K$  et le prix effectif  $S_T$  de l’actif à la date  $T$ . Pour une option call, on a donc  $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$ , où  $x^+$  vaut  $x$  si  $x > 0$  et 0 sinon. L’option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date  $T$ , l’actif  $S$  au prix minimum  $K$ . En examinant successivement les cas  $S_T \geq K$  et  $S_T < K$ , il est facile de voir que  $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$ . Le nombre  $K$  s’appelle le *prix d’exercice* (ou *strike*) de l’option.

A l’instant  $t = 0$  le portefeuille de couverture  $(a_0, b_0)$  doit satisfaire  $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$ , c’est-à-dire vérifier le système

$$\begin{cases} a_0 120 + b_0 &= a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 &= a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

On trouve immédiatement  $a_0 = \frac{5}{8}$  et  $b_0 = -25$  d’où  $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$ . Le vendeur de l’option, dont le prix est  $\Pi_0 = 25$ , touche cette prime à l’instant initial, y ajoute un montant de 25 qu’il emprunte, le tout servant à acheter  $\frac{5}{8}$  d’actifs à 80 pièce. Si, pour  $t = \delta t$ , l’actif sous-jacent a évolué à la baisse et que  $S_{\delta t} = 40$ , *on solde* le portefeuille; la part en actifs ne vaut plus que  $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$ , soit exactement de quoi rembourser la dette  $b_0 = 25$ . Si, pour  $t = \delta t$ , l’actif sous-jacent a évolué à la hausse et que  $S_{\delta t} = 120$ , nous avons vu dans l’exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter  $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$ ; comme il y a déjà  $\frac{5}{8}$  d’actifs dans le portefeuille, il convient d’en *racheter*  $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$  au prix unitaire  $S_{\delta t} = 120$ , donc pour une valeur de  $\frac{10}{48}120 = 25$ , que l’on emprunte, ce qui porte la dette totale à  $25 + 25 = 50$ , comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu’à l’échéance sa valeur soit exactement celle de l’option  $(100, 0, \text{ou } 0 \text{ selon les valeurs de } S_{2\delta t})$  : c’est le principe de la couverture dynamique.

**Remarque :** On peut à présent comprendre pourquoi le mécanisme de couverture dynamique d’une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d’incendie : dans le cas d’une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu’il a de la dynamique de l’actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d’un seul contrat, et même le couvrir exactement, c’est-à-dire le faire disparaître. Dans le cas d’une assurance



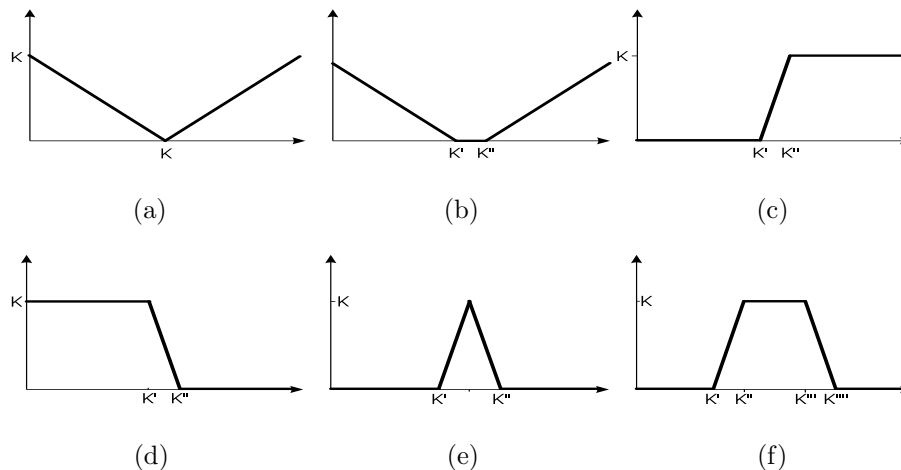


FIG. 1.5 – Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire face à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanément est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grâce à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécessairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

**Remarque :** Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille  $(a_0, b_0)$  adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec  $5/8$ ième d'actif  $S_t$  et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$ , si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de 12,5.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.



## Chapitre 2

# Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à  $n$  étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial*. Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité risque-neutre*, une probabilité permettant le calcul du prix d'un portefeuille de couverture. Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage*.

### 2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée  $S_t$  sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépôt d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée  $B_t$ .

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979<sup>1</sup> de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de  $n$  instants régulièrement répartis entre 0 et  $T$ ,  $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n\delta t = T\}$ , où  $\delta t > 0$  est un réel fixé (supposé petit), la valeur  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné  $S_0$  à l'instant  $t = 0$ , et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant  $t \in \mathbb{T} \setminus \{n\delta t\}$  est  $S_t$ , alors sa valeur à l'instant  $t + \delta t$  sera soit  $S_t u$  soit  $S_t d$ , où  $u$  et  $d$  sont des constantes qu'on supposera telles que  $0 < d < u$ . Donc  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant  $t = i\delta t \in \mathbb{T}$ , présente  $i + 1$  noeuds ou  $i + 1$  valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, \dots, i\}$$

l'indice  $j$  représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = i\delta t$  ( $j$  est nombre de “up”), l'ordre des “up” et des “down” n'important pas.

- Pour la même suite d'instants  $\mathbb{T}$ , l'actif non risqué vaut  $B_0 = 1$  à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence  $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$ , soit  $B_t = e^{rt}$ , où  $r$  désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période  $[0, T]$ .

---

<sup>1</sup>Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendamment par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrète et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au delà de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révéler trop limitative. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris.

## 2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , d'échéance  $T = n\delta t$  et de prix d'exercice  $K$ . Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif  $S_t$  à la date  $T$  au prix  $K$ . La valeur de cette option à l'instant final (son paye off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \text{Max}(S_T - K, 0) \quad (2.1)$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut  $S_0 u^j d^{n-j}$  à l'instant final, pour un certain  $j \in \{0, \dots, n\}$ , le call vaudra  $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$  pour ce même  $j$ .

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille  $\Pi_t$  par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues  $\Pi_0$ ,  $a_0$ , et  $b_0$ , prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off  $(S_T - K)^+$ . Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date  $t$ , lorsque le sous-jacent prend la valeur  $S_t$ , le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent  $S_t$ , et d'une certaine quantité de placement non-risqué  $B_t$ . Comme sa composition a été arrêtée à l'instant  $t - \delta t$  (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que  $S_{t-\delta t}$ , et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date  $t$ , nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta \Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t) - (a_{t-\delta t} S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t} B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t} \delta S_t + b_{t-\delta t} \delta B_t \quad (2.2)$$

où  $\delta S_t$  et  $\delta B_t$  sont des notations pour les différences  $S_t - S_{t-\delta t}$  et  $B_t - B_{t-\delta t}$ . On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par  $S_t$ , mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date  $t$  devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \quad (2.3)$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par  $S$  la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant  $t$ , par  $\Pi$  ( $\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t$ ) celle correspondante du portefeuille et par  $B$  celle de  $B_t$ . Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain"  $Su$  et  $Sd$ , d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$ , supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition  $(a, b)$  comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t} B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t} B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t} \frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u - d)}. \quad (2.4)$$

On pose alors  $a_t = a$  et  $b_t = b$  et on en déduit la valeur cherchée  $\Pi_t$ , par la formule  $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$ . On a donc la proposition suivante :

**Proposition 2.1** *Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, toute option d'échéance  $T$  et de fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  est duplicable, c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

**Preuve :** On raisonne par récurrence sur le nombre  $n$  d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape; pour un modèle à  $n$  étapes, on remarque simplement que, comme  $S_t$  prend deux valeurs  $S_0 u$  et  $S_0 d$  à l'instant  $\delta t$ , ces deux valeurs sont chacune les valeurs initiales d'un modèle à  $n - 1$  étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture  $\Pi_{\delta t}^u$  et  $\Pi_{\delta t}^d$  avec lesquels on peut alors calculer  $\Pi_0$  (et donc  $C_0$ ) comme dans un modèle à une étape.  $\square$

## 2.3 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations)? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille  $\Pi = aS + bB$  en utilisant les solutions  $(a, b)$  trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut réécrire  $\Pi$  comme une fonction de  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$ , sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \quad (2.5)$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \quad (2.6)$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que  $p + q = 1$  et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que  $0 < d < e^{r\delta t} < u$ , ces quantités  $p$  et  $q$  vérifient aussi  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ . Donc si l'on considère que  $\Pi^u$  et  $\Pi^d$  sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernoulli  $\Pi$  avec  $\mathbb{P}(\Pi = \Pi^u) = p$  et  $\mathbb{P}(\Pi = \Pi^d) = q$  alors l'équation (2.5) affirme simplement que  $\Pi$  est précisément le produit par le *facteur d'actualisation*,  $e^{-r\delta t}$ , de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs  $p$  et  $q$  ainsi définies se calculent directement en fonction de  $u$ ,  $d$  et  $r$ , donc à partir des données du modèle choisi  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \quad (2.7)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité  $(p, 1 - p)$  et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent  $(S_t)$  d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque  $t \in \mathbb{T}$ , les  $i + 1$  valeurs  $\{S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, \dots, i\}$  que peut prendre  $S_t$  sont les  $i + 1$  valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(S_t = S_0 u^j d^{i-j}) = \binom{i}{j} p^j (1 - p)^{i-j}. \quad (2.8)$$

En effet la valeur  $S_0 u^j d^{i-j}$  atteinte par  $S_t$  correspond à une trajectoire qui présente  $j$  "montées" et  $i - j$  "descentes" dont la probabilité est  $p^j (1 - p)^{i-j}$  si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement  $\binom{i}{j}$  trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

**Proposition 2.2** *Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne  $(T, \varphi(S_T))$  est donnée par*

$$e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} \varphi(S_0 u^j d^{n-j}) \quad (2.9)$$

*c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si  $\varphi(S) = (S - K)^+$ , on a*

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$$

*et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si  $\varphi(S) = (K - S)^+$ , on a*

$$P_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} (K - S_0 u^j d^{n-j})^+.$$

La formule (4.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox, Ross, et Rubinstein.

**Exemple :** Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime  $C_0$  peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation  $S = pSu + (1-p)Sd$  (on a supposé  $r = 0$ ) ; on obtient  $p = \frac{1}{2} = 1-p$  ; puis on calcule  $C_0$  comme l'espérance  $C_0 = 100\mathbb{P}(S_T = 180) + 0\mathbb{P}(S_T = 60) + 0\mathbb{P}(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$ .

**Remarque :** Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

## 2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (4.3)) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait*. Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide* : à tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché ; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options) ; en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask). L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.
- La seconde hypothèse est celle, déjà mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant*. Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant  $S_t$  à l'instant  $t$  a une valeur actuelle, en  $t = 0$ , égale à  $e^{-rt}S_t$ . Or, durant la période  $[0, t]$ , le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si  $t$  était très petit, cesse d'être valable lorsque  $t$  devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondamentale, la présence de taux variables.
- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.
- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

**Définition :** Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinçant nul en  $t = 0$  ( $\Pi_0 = 0$ ) et tel que  $\Pi_T \geq 0$  dans tous les états du monde et  $\mathbb{P}(\Pi_T > 0) > 0$ .

**Proposition 2.3** Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future  $T$ , ont la même valeur à toutes dates intermédiaires  $0 < t < T$ .

En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier  $\Pi_t$  (en crédit), du second  $-\tilde{\Pi}_t$  en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence  $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$  placée au taux  $r$ . Si par exemple on suppose, par l'absurde,  $\alpha > 0$ , alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	$T$
$\Pi_t$	$\Pi_T$
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
$\alpha$	$\alpha e^{r(T-t)}$
$0$	$> 0$

L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \quad (2.10)$$

En effet comme  $e^{r\delta t}$  est le rendement  $\frac{B_t}{B_0}$  de l'actif non risqué durant le laps de temps  $\delta t$ , et comme  $d$  et  $u$  sont les deux rendements possibles  $\frac{S_t}{S_0}$  de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait  $d < u < e^{r\delta t}$  par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

$t$	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
$\alpha$	$\alpha e^{r\delta t}$
$0$	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si  $\alpha$  est une somme d'argent égale à  $S_t$  et placée au taux  $r$ , le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas  $e^{r\delta t} < d < u$ , avec  $+S_t$  et  $-\alpha$ .

**Remarque :** Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

**Remarque :** C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple ? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix  $C_0$  strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture  $\Pi_0$ , le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme  $\Pi_0 - C_0$ , serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
$C_0$	$C_T$
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
$0$	$> 0$

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put* :

**Proposition 2.4** *Considérons un call  $C_t$  et un put  $P_t$  souscrits sur le même actif sous-jacent  $S_t$ , de même date d'échéance  $T$  et même prix d'exercice  $K$ . On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

**Preuve :** On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles  $\Pi_t := C_t - P_t$  et  $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$  ont même valeur à l'échéance  $t = T$  puisque l'on a  $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$ .  $\square$





## Chapitre 3

# Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques aléatoires, ou *processus stochastiques*, souvent plus pertinents car ils permettent de prendre en compte plusieurs avenir possibles; les plus simples sont les *marches aléatoires*.

### 3.1 Définitions et exemple du modèle CRR

**Définition :** Soient  $\Omega$  un ensemble fini,  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  une espace probabilisé fini et soit  $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \dots, n\delta t = T\}$ , où  $\delta t > 0$  est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application  $Z$  mesurable

$$Z : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (\omega, t) \mapsto Z_t(\omega).$$

Oublions provisoirement l'adjectif "mesurable" dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord l'exemple du modèle de Cox-Ross-Rubinstein, CRR, où  $Z=S$ . Donc le prix  $S_t$  de l'action sera notre exemple de  $Z_t$  qui est une v.a. dont la valeurs sont les valeurs  $S_t(\omega)$  pour  $\omega \in \Omega$  dans le modèle CRR.

Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de plusieurs possibles dont une seule se réalisera : précisément, une *trajectoire* de la marche  $Z$  est l'ensemble  $\{(t, Z_t(\omega)) \mid t \in [0..T]_{\delta t}\}$  pour un  $\omega \in \Omega$  quelconque. L'ensemble des trajectoires possibles sera muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en termes de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

Nous poursuivons donc notre mise en formules du modèle CRR dans cet esprit, en nous bornant à décrire les outils mathématiques disponibles pour prendre en compte l'idée d'informations disponible à tout moment et qui permettra de mener pour chaque futur encore possible un calcul tenant compte de ce qui ne risque plus de se produire, compte tenu de cette information : ceci permettra, au chapitre suivant, de rerépartir la probabilité totale sur ces seuls futurs encore possibles.

Voici un résumé de la description de CRR à laquelle nous sommes parvenus. Nous notons  $S_t$  le prix de l'action pour une succession d'instant  $t \in \mathbb{T} := [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T\}$ , où  $T = n\delta t$  est la date d'exercice d'un contrat payant  $\varphi(S_T)$ , ou plus généralement une quantité  $X$  qui pourra être calculée sans ambiguïté à la date  $T$ , en fonction des valeurs que l'action aura prise pour  $t \in \mathbb{T}$ . C'est cette somme que nous appelons le *payoff*. Les valeurs pouvant êtres prises par l'action sont

$$S_t = S_0 u^j d^{i-j}, \tag{3.1}$$

où  $S_0$  est la valeur de l'action à la date présente,  $t = i\delta t$  et donc  $i = t/\delta t = nt/T \leq n$ , puisque  $t \leq T$ . Notons que choisir un modèle CRR demande trois "paris", sur  $n$ ,  $u$ , et  $d$ ; nous ne voyons aucun inconvénient à choisir  $d = 1/u$ , dès lors qu'on respecte que  $d < R < u$ , où  $R := e^{r\delta t}$  est la somme dûe, "intérêt et principal" dirait la Cigale, après une période  $\delta t$ , pour le prêt d'un euro (ou toute unité

choisie pour exprimer  $S_t$ ). Nous appelons  $r$  le taux d'intérêt (ou "taux continu"); il est, et c'est essentiel ici, supposé connu pour tout la période  $\mathbb{T} = [0..T]_{\delta t}$ , et constant. Le choix de  $n$  a son importance mais n'est pas capital, par exemple  $n = 50$ ; l'approche classique "en temps continu" évacue cette question en prenant la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini. Le choix de  $u$ , en revanche, est essentiel. En pratique ce choix s'effectue de façon à ce que le modèle soit en cohérence avec les prix d'options sur le marché, au travers du choix de la valeur de la "volatilité"  $\sigma$  de l'action, avec  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ . On peut considérer que l'introduction d'un modèle, tel qu'ici CRR, sert avant tout à préciser ce qu'on entend, en pratique, par "cohérence", et on choisira  $\sigma$  tel que le prix observé pour une option vendue sur le marché coïncide avec la valeur  $\Pi_0(u(\sigma))$  calculée avec la méthode exposée ici. Une fois la valeur  $\sigma$  ainsi déterminée (on parle de "volatilité implicite"), on l'utilise pour calculer la valeur d'autres contrats, de payoffs  $X$  ou de date d'exercice  $T$  différents

### 3.2 L'ensemble $\Omega$ , ou comment indexer tous les avenir possibles

Jusqu'ici nous n'avons rien rappelé pour  $j$  dans l'expression (3.1). A l'évidence  $j$  compte le nombre de mouvement vers le haut de  $S$  pour tous les instants  $s$  inférieurs ou égaux à  $t = i\delta t$ . Nous voyons donc que  $j$  est un entier, qu'il dépend de  $i$  et des mouvements du cours jusqu'à  $t = i\delta t$ , et qu'il est compris entre 0 (que des mouvements vers le bas) et  $i$  (que des mouvements vers le haut). Voici comment nous allons prendre en compte ces deux traits essentiels de  $j$  : qu'il est dynamique (il dépend de  $i$ ) et aléatoire (il dépend de ce qu'il adviendra à  $S$ ) : nous allons substituer  $J_i$  à  $j$  et donc

$$S_{i\delta t} = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i} \quad (3.2)$$

où, pour tout  $i \in [0..n]$ ,  $J_n : \Omega \rightarrow [0..i] \subseteq \mathbb{R}$  est une fonction définie sur un ensemble permettant d'indexer tous les comportements envisagés par le modèle CRR. A l'évidence, nous pouvons choisir pour  $\Omega$  un ensemble fini. Dès que  $i > 0$ ,  $J_i$  peut prendre plus qu'une valeurs et est donc aléatoire<sup>1</sup>. A noter qu'il n'est pas important que nous précisions notre choix de  $\Omega$  : cela peut être une définition géométriquement parlante comme toutes les trajectoires possibles dans le graphe des valeurs  $(t, S_t)$  dans le modèle CRR, ou plus proche d'un codage des mouvements tel que  $\Omega = \{0, 1\}^n$ ; dans ce dernier cas, si  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega = \{0, 1\}^n$ , on a la définition explicite suivante de  $J_i(\omega) = \sum_{k=1}^i \omega_k$ , mais ceci ne nous sera pas utile.

A présent  $S := (S_t)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$  est lui aussi un processus, défini pour tout  $t \in \mathbb{T} = [0..T]_{\delta t}$ , avec

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, S_{i\delta t}(\omega) = S_0 u^{J_i(\omega)} d^{i-J_i(\omega)}.$$

Lorsque nous avons introduit le modèle CRR, nous avons expliqué que  $S_{t+\delta t}$  se déduit de  $S_t$  soit par multiplication par  $u$  (mouvement vers de haut) ou par  $d$  (mouvement vers le bas). Comme  $J_i$  compte le nombre de mouvements vers le haut, nous voyons que les éléments constitutifs de la description de la dynamique aléatoire de  $S$  sont les

$$\delta J_{i+1} = J_{i+1} - J_i, \text{ à valeurs dans } \{0, 1\}. \quad (3.3)$$

Ils permettent, par la récurrence  $J_{i+1} = J_i + \delta J_{i+1}$ , de définir les  $J_i$  et, partant, les  $S_{i\delta t}$ . Ils se prêtent bien à l'introduction de la probabilité, conformément à l'observation faite à la section 2.3. Rappelons qu'à la formule (2.6) nous avons introduit la valeur

$$p = \frac{R - d}{u - d}, \text{ avec } R = e^{r\delta t} \quad (3.4)$$

comme probabilité "de calcul" affectée à un "up" de l'action, c'est-à-dire que  $p = \mathbb{P}(S_{t+\delta t} = su)$  où  $s = S_t(\omega)$ , indépendamment de cette valeur. Ceci équivaut à imposer, dans notre modèle stochastique, que les  $(\delta J_i)_{i=1..n}$  soient des v.a. de Bernoulli *indépendantes*, de loi  $\mathcal{B}(1, p)$ , c'est-à-dire que  $p = \mathbb{P}(\delta J_i = 1)$  et, partant, que chaque  $J_i = \sum_{k=1}^i \delta J_k$  suit une loi binômiale  $\mathcal{B}(i, p)$  et, comme, pour  $t = i\delta t$ ,  $S_t = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i}$ , on retrouve

$$\mathbb{P}(S_t = S_0 u^j d^{i-j}) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}. \quad (3.5)$$

C'est en ce sens que l'on peut voir le processus  $\delta J := (\delta J_i)_{i=1..n}$  comme la source fondamentale d'aléa du modèle CRR.

<sup>1</sup>Lorsque nous aurons muni  $\Omega$  d'une probabilité  $\mathbb{P}$ ,  $J_i$  sera une variable aléatoire (v.a.). Comme nous pouvons choisir  $\Omega$  fini, nous pourrions aussi le choisir tel que  $\mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0$ , pour tout  $\omega \in \Omega$  et que  $\mathbb{P}$  et définie sur tout  $\mathcal{P}(\Omega)$ ; ceci nous permet d'introduire la notion de tribu sans rencontrer les difficultés que cela implique habituellement.

Par exemple dans le modèle CRR à  $n = 3$  étapes, l'espace  $\Omega$  comporte 8 évènements élémentaires,  $\omega_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\omega_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\omega_3 = (1, 0, 1)$ ,  $\omega_4 = (1, 0, 0)$ ,  $\omega_5 = (0, 1, 1)$ ,  $\omega_6 = (0, 1, 0)$ ,  $\omega_7 = (0, 0, 1)$ , et  $\omega_8 = (0, 0, 0)$  et il y a 8 trajectoires notées respectivement  $\gamma_1, \dots, \gamma_8$  :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^3)) \\ \gamma_2 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_3 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_4 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_5 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_6 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_7 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\ \gamma_8 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 d^3))\end{aligned}$$

### 3.3 Caractériser ce qui sera connu et ce qui restera aléatoire

#### 3.3.1 La relation $\overset{t}{\sim}$ et la partition $\mathfrak{Q}_t$ de $\Omega$

Considérons un  $t \in [0..T]_{\delta t}$  et deux "états possibles du monde"  $\omega' \in \Omega$  et  $\omega'' \in \Omega$ . Nous dirons que  $\omega'$  et  $\omega''$  sont équivalents à l'instant  $t$  et écrirons  $\omega' \overset{t}{\sim} \omega''$  si et seulement si pour tous  $s \in [0..t]_{\delta t}$  on a  $S_s(\omega') = S_s(\omega'')$

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega'' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall s \in [0..t]_{\delta t} S_s(\omega') = S_s(\omega'') \quad (3.6)$$

L'idée est simple :  $\Omega$  indexe toutes les situations prises en compte par le modèle et les deux situations indexées par  $\omega'$  et  $\omega''$  correspondent à des évolutions du cours qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$  au moins. Pour chaque  $t$  la relation  $\overset{t}{\sim}$  est une relation d'équivalence ; la classe d'équivalence  $\bar{\omega}$  (ou  $\bar{\omega}^t$  si l'on tient à rappeler  $t$ ) est composée de tous les  $\omega'$  tels que  $\omega' \overset{t}{\sim} \omega$ . Deux classes d'équivalences  $\bar{\omega}_1^t$  et  $\bar{\omega}_2^t$  quelconques sont nécessairement égales ou disjointes<sup>2</sup> et chaque  $\omega$  appartient à une telle classe ("sa" classe  $\bar{\omega}$ , tout simplement). A la relation  $\overset{t}{\sim}$  correspond donc une *partition*  $\mathfrak{Q}_t$  de  $\Omega$ , ce qui signifie que  $\mathfrak{Q}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\bigcup_{A \in \mathfrak{Q}_t} A = \Omega$ , et si  $A_1 \in \mathfrak{Q}_t$  et  $A_2 \in \mathfrak{Q}_t$  sont distincts, ils sont nécessairement disjoints.

**Exemple :** Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :

- si  $t = 0$ ,  $\mathfrak{Q}_0 = \{\Omega\}$ .
- si  $t = \delta t$ ,  $\mathfrak{Q}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$ .
- si  $t = 2\delta t$ ,  $\mathfrak{Q}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{\omega_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{\omega_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$ .
- si  $t = 3\delta t$ ,  $\mathfrak{Q}_{3\delta t} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$ .

#### 3.3.2 La tribu $\mathcal{F}_t^S$

Observons que pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $s \leq t$  on a  $\bar{\omega}^s \supseteq \bar{\omega}^t$  (voyez-vous pourquoi?). Cependant ceci ne peut pas s'écrire  $\mathfrak{Q}_s \supseteq \mathfrak{Q}_t$ , ni  $\mathfrak{Q}_s \subseteq \mathfrak{Q}_t$  d'ailleurs. Si nous voulons obtenir une inclusion d'une telle nature nous devons, à partir de chaque partition  $\mathfrak{Q}_t$  considérer le *plus petit sous ensemble de  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$*  tel que, pour tout  $A \in \mathcal{Q}$ , si  $\bar{\omega}^t$  rencontre  $A$ , alors il est contenu dans  $A$  (ou encore, que ou bien  $\bar{\omega}^t \cap A = \emptyset$  ou bien  $\bar{\omega}^t \subseteq A$ .) Ce plus petit sous-ensemble  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est tout simplement constitué des réunions quelconques<sup>3</sup> de classes  $\bar{\omega}^t$  ; on le notera  $\mathcal{F}_t^S$  et il s'appelle *la tribu engendrée par la partition  $\mathfrak{Q}_t$* . Observez que, comme les "morceaux" dans la partition  $\mathfrak{Q}_s$  sont réunions de morceaux dans  $\mathfrak{Q}_t$ , on a  $\mathfrak{Q}_s \subseteq \mathcal{F}_t^S$ , et donc aussi  $\mathcal{F}_s^S \subseteq \mathcal{F}_t^S$  : on dit que la tribu  $\mathcal{F}_s^S$  est plus *grossière* que la tribu  $\mathcal{F}_t^S$ , ou encore que la tribu  $\mathcal{F}_t^S$  est plus *fine* que la tribu  $\mathcal{F}_s^S$ . Notez que si  $s \leq t$ , on a  $\bar{\omega}^s \supseteq \bar{\omega}^t$  mais  $\mathcal{F}_s^S \subseteq \mathcal{F}_t^S$ .

L'un des intérêts de passer de la partition à la tribu, c'est que dans la tribu on a un calcul : la tribu est une *algèbre*, dans le sens suivant : on dit que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  est une algèbre si  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , et si  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{A}$ , alors  $A^c \in \mathcal{A}$  et  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .

Nous avons vu comment passer de la partition à l'algèbre. Le passage inverse, de l'algèbre à la partition en prenant pour parties de la partitions les *atomes* de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , qui sont les plus petits éléments  $A$  de  $\mathcal{A}$  dans le sens où, si  $\emptyset \neq B \subseteq A$ , si  $B \in \mathcal{A}$ , alors nécessairement  $B = A$ .

<sup>2</sup>c'est-à-dire d'intersection vide.

<sup>3</sup>Veuillez observer que la réunion des éléments d'une famille vide est vide, et donc  $\emptyset \in \mathcal{F}_t^S$

**Exemple :** Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition  $\mathfrak{P}_t$ , une tribu, notée  $\mathcal{F}_t$  :

- si  $t = 0$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .
- si  $t = \delta t$ ,  $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\emptyset, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$ .
- si  $t = 2\delta t$ ,  $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\emptyset, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \dots, \Omega\}$ .
- si  $t = 3\delta t$ ,  $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Et on a évidemment  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$ . Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration*.

### 3.3.3 La tribu associée à une v.a.

De façon générale, si  $X : \Omega \rightarrow R$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $R = \mathbb{R}$  ou  $R = \mathbb{R}^d$ , on définit une partition  $\mathfrak{P}_X$  de  $\Omega$ , en définissant, pour tout  $\omega \in \Omega$ , la partie  $\bar{\omega}^X \in \mathfrak{P}_X$  contenant  $\omega$  par

$$\bar{\omega}^X := \{\omega' \in \Omega \mid X(\omega') = x_\omega\}, \text{ où } x_\omega = X(\omega).$$

En d'autres termes, les éléments de  $\mathfrak{P}_X$  sont les  $X^{-1}(x)$  pour  $x \in X(\Omega)$ . Cette partition, elle aussi, engendre une algèbre appelée *la tribu* de  $X$  et notée  $\sigma(X)$ ; on a

$$\sigma(X) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \exists A' \in \mathcal{P}(R), A = X^{-1}(A')\}. \quad (3.7)$$

On retrouve  $\mathcal{F}_t^S$  en choisissant  $X = (S_{\delta t}, S_{2\delta t}, \dots, S_{t-\delta t}, S_t)$  qui est une variable aléatoire à valeurs dans  $R = \mathbb{R}^i$ , où  $t = i\delta t$ .

## 3.4 $\mathcal{F}_t^S$ -mesurabilité

Nous pouvons à présent aborder la notion cruciale de mesurabilité d'une variable aléatoire  $Y$  qui correspond à l'idée de ce qu'il suffira de connaître pour que  $Y$  ne soit plus aléatoire, mais connue. Concrètement, on aura que  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si  $Y$  est une fonction déterministe ( $g$ ) de la grandeur  $X$ , avec  $Y = g(X)$ . Ainsi, dès lors que nous connaissons  $X(\omega^*)$  nous connaissons aussi  $Y(\omega^*) = g(X(\omega^*))$ , où  $\omega^*$  est l'élément (de Dieu seul connu...) de  $\Omega$  qui indexe l'histoire que nous vivons (et vivrons) effectivement !

L'exemple concret (et capital!) que nous avons compris au chapitre 2, c'est  $Y := \Pi_t$ , la valeur du portefeuille de couverture à l'instant  $t$ . En effet nous avons vu dans ce chapitre comment calculer cette valeur comme une fonction de  $S_t$  et nous avons  $\Pi_t = \varphi(t, S_t)$ . Ainsi  $\Pi_t$  est  $\sigma(S_t)$ -mesurable (poser  $X = S_t$  et  $g : x \mapsto \varphi(t, x)$ )

La définition de la mesurabilité de  $Y$  par rapport à une tribu  $\sigma$  est à la fois simple<sup>4</sup> et, certainement, totalement opaque au lecteur par rapport à son utilisation évoquée :

**Définition :** La variable aléatoire  $Y$  est dite *mesurable* par rapport à la tribu  $\sigma$  si elle est constante sur les atomes de  $\sigma$ .

**Proposition 3.1** *La variable aléatoire  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe une fonction  $g$  définie sur  $X(\Omega)$  telle que  $Y = g(X)$ .*

**Preuve :** Les atomes de  $\sigma(X)$  sont les  $X^{-1}(\{x\})$  pour  $x \in X(\Omega)$ . Supposons que  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable et notons  $\bar{\omega}$  l'atome de  $\sigma(X)$  contenant  $\omega$ . Soit  $x \in X(\Omega)$  quelconque; donc  $x = X(\omega_x)$  pour un  $\omega_x \in \Omega$  au moins;  $Y$  est constante sur  $\bar{\omega}_x$ , donc  $Y(\bar{\omega}_x) = \{y_x\}$ ; il suffit de poser  $g(x) := y_x$ .

Réciproquement, supposons que  $Y = g(X)$ ; soit  $\omega \in \Omega$  quelconque et  $x_\omega := X(\omega)$ . Par définition de  $\bar{\omega}$ ,  $X$  est constante sur cet atome de  $\sigma(X)$ , donc  $\forall \omega' \in \bar{\omega}$ ,  $X(\omega') = X(\omega) = x_\omega$ , et donc  $Y(\omega') = g(X(\omega')) = g(x_\omega) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ ; donc  $Y$  est bien constante sur  $\bar{\omega}$  ce qui, par définition, montre que  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable.  $\square$

Dans le chapitre qui suit nous allons, pour chaque  $t \in [0..T]_{\delta t}$ , confectionner une variable aléatoire  $\Pi_t$   $\mathcal{F}_t^S$ -mesurable qui se prête à un remarquable calcul : le calcul des espérances conditionnelles. Nous verrons que cette variable aléatoire, appelée l'espérance conditionnelle du payoff  $\Pi_T$  de l'option, n'est autre que la valeur, à l'instant  $t$ , du portefeuille de couverture. Ce faisant, nous rendrons applicable le calcul des espérances conditionnelles au calcul des prix d'options.

<sup>4</sup>Le fait que  $\Omega$  soit fini permet cette définition simplifiée; la définition dans le cas générale n'est guère plus compliquée (mais impose de savoir ce qu'est un *borélien* de  $\mathbb{R}$ ; toutes fois les preuves que nous utiliseront sont alors beaucoup plus subtile, même si elle n'apprennent rien sur la Finance !)

# Chapitre 4

## Espérance conditionnelle

Dans les leçons précédentes nous avons appris à calculer le prix de diverses options à l'instant  $t = 0$ . Les options étant des actifs financiers négociables, qu'on veut pouvoir acheter et vendre aussi à des instants ultérieurs, on voudrait également savoir décrire et calculer leur prix à des instants  $t > 0$ . C'est ce que nous allons faire dans cette leçon grâce à la notion d'*espérance conditionnelle par rapport à une tribu*. On découvrira au passage que cette espérance conditionnelle, qui généralise l'espérance conditionnelle usuelle d'une variable aléatoire par rapport à un événement, est en fait un extraordinaire outil de calcul, un de ceux qui font que la théorie des probabilités s'appelle souvent le *calcul* des probabilités.

### 4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un événement

Voici tout d'abord quelques rappels de probabilités élémentaires. Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé que nous supposons comme précédemment *fini* et satisfaisant en outre la condition suivante<sup>1</sup> :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) \neq 0.$$

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . L'espérance de  $X$  est le *nombre*  $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ . Notons que, pour tout événement  $A \subseteq \Omega$  appartenant à la tribu  $\mathcal{T}$ , on peut exprimer la probabilité de  $A$  comme l'espérance d'une v.a., en posant  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\alpha \in A} \mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{E}\mathbb{I}_A$ , où  $\mathbb{I}_A$  désigne la v.a. indicatrice de  $A$ , égale à 1 sur  $A$  et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle "espérance de  $X$  sachant  $A$ " ou "espérance de  $X$  conditionnellement à  $A$ ", le *nombre*, notée  $\mathbb{E}(X/A)$ , donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{\alpha \in A} X(\alpha)\mathbb{P}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A)}{\mathbb{E}\mathbb{I}_A}.$$

En d'autres termes  $\mathbb{E}(X/A)$  est la moyenne des éléments de  $A$ , pondérée par leur probabilité rapportée à la probabilité de  $A$ .

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un événement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas *un* nombre, mais "un nombre qui dépend de l'état du monde", c'est-à-dire une variable aléatoire.

### 4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu

Soient  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$  une tribu et  $\mathcal{Q} := \{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$  la partition de  $\Omega$  formée par les atomes de  $\mathcal{F}$ .

**Définition :** Soit  $X$  est une v.a. sur  $\Omega$ . On appelle *espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à la tribu  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$* , ou encore *espérance conditionnelle de  $X$  relativement à la partition  $\mathcal{Q}$* , la v.a. notée  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  définie, pour tout  $\omega \in \Omega$ , par

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) := \mathbb{E}[X/\bar{\omega}] = \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{\omega})} \sum_{\alpha \in \bar{\omega}} X(\alpha)\mathbb{P}(\alpha)$$

où  $\bar{\omega}$  désigne l'atome  $\Omega_i \in \mathcal{Q}$  de la partition tel que  $\omega \in \Omega_i$ .

---

<sup>1</sup>conformément à l'usage, nous notons  $\mathbb{P}(\omega)$  pour  $\mathbb{P}(\{\omega\})$

On voit donc que par définition l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu  $\mathcal{F}$  est une v.a. constante sur les atomes  $\Omega_i$  de la partition  $\mathfrak{Q}$  associée à  $\mathcal{F}$ . On a plus précisément :

**Proposition 4.1** *La v.a.  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{F}$  et de plus si  $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  désigne cette v.a., alors  $Y$  peut être définie comme l'unique v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable telle que*

$$\forall \Omega_i \in \mathfrak{Q} \quad , \quad \mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i). \quad (4.1)$$

**Preuve :** Le fait que  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  soit mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{F}$  est clair par définition puisqu'elle est constante sur les atomes de la partition  $\mathfrak{Q}$  associée à  $\mathcal{F}$ .

Montrons qu'elle vérifie l'équation (4.1) : Soit  $\omega$  est un élément quelconque de l'atome  $\Omega_i$ , et donc  $\bar{\omega} = \Omega_i$  ; comme  $Y$  est constante sur les atomes on a  $Y(\omega) = Y(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Omega_i$ . Par définition de  $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ , on a

$$\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} Y(\alpha) \mathbb{P}(\alpha) = Y(\omega) \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} \mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) \frac{\mathbb{P}(\Omega_i)}{\mathbb{P}(\Omega_i)} = \mathbb{E}[X/\bar{\omega}] = \mathbb{E}(X/\Omega_i).$$

Réciproquement si  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, elle est constante sur les  $\Omega_i \in \mathfrak{Q}$ , et la relation  $\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i)$  définit  $Y$  uniquement car, pour tout  $\omega \in \Omega$ , on aura  $Y(\omega) := \mathbb{E}(X/\Omega_i)$ , où  $\Omega_i$  est l'atome contenant  $\omega$ .  $\square$

Voici les principales propriétés de l'espérance conditionnelle :

**Proposition 4.2** *Soient  $X$  et  $Y$  des v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des sous-tribus de  $\mathcal{T}$ , et  $x_0, a$  et  $b$  des nombres réels. On a :*

1.  $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = X$ , et  $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$ .
2.  $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ .
3. Si  $X \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $X = 0$ .
4.  $\mathbb{E}(x_0|\mathcal{F}) = x_0$ .
5. Si  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, on a  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
6. Si  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ . En particulier  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$ .

Cette sixième propriété s'appelle la transitivité des espérances conditionnelles. Elle est d'un usage fréquent en Finance.

### 4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$

On désigne par  $L^2(\Omega)$  l'ensemble des variables aléatoires sur  $\Omega$  dans le cas où on munit cet ensemble d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire) que nous allons définir à présent. Cet espace de v.a. joue un rôle fondamental en économétrie et en calcul stochastique.

Tout d'abord, il est facile de munir l'ensemble des v.a. sur  $\Omega$  d'une structure d'espace vectoriel : si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments de cet ensemble,  $X + Y$  et, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X$  sont encore des v.a. sur  $\Omega$ . D'autre part on peut définir un produit scalaire sur cet ensemble de la façon suivante :

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY) \quad (4.2)$$

et la norme associée par :

$$\|X\| := \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

En effet on vérifie facilement la bilinéarité et la symétrie ; de plus on a  $\|X\| \geq 0$  puisque  $X^2$  est une v.a. positive ou nulle ; enfin, si  $\|X\| = 0$ , alors  $X = 0$  car  $\mathbb{E}(X^2)$  est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs (puisque  $\mathbb{P}(\omega) > 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ ) des nombres positifs.

On vérifie sans peine que l'on a  $\mathbb{E}(X) = \langle X, 1 \rangle$ ,  $Cov(X, Y) = \langle X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) \rangle$  et donc  $Var(X) = \langle X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) \rangle = \|X - \mathbb{E}(X)\|^2$ .

L'espace  $L^2(\Omega)$  des variables aléatoires sur  $\Omega$ , muni du produit scalaire (4.2), est donc bien un espace euclidien. On sait que dans un espace euclidien on peut associer à tout vecteur sa projection orthogonale sur un sous espace. Rappelons la définition de la projection orthogonale :

**Définition :** Soient  $G \subseteq L^2(\Omega)$  un sous espace vectoriel et  $X \in L^2(\Omega)$  un vecteur quelconque. On appelle *projection orthogonale* de  $X$  sur  $G$ , notée  $\pi(X)$  l'unique élément de  $G$  tel que

$$\forall Z \in G, \langle X - \pi(X), Z \rangle = 0$$

On peut vérifier facilement que si  $\mathcal{F}$  est une tribu alors l'ensemble des v.a. de  $L^2(\Omega)$   $\mathcal{F}$ -mesurables forment un sous espace vectoriel. En effet, si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables, donc constantes sur les atomes de la partition associée à la tribu  $\mathcal{F}$ , toute combinaison linéaires  $\lambda X + \mu Y$ , pour  $\lambda$  et  $\mu$  réels quelconques, est encore  $\mathcal{F}$ -mesurable.

**Proposition 4.3** Soient  $X$  une v.a. et  $\mathcal{F}$  une tribu. L'espérance conditionnelle de  $X$  par rapport à la tribu  $\mathcal{F}$  est la projection orthogonale de  $X$  sur le sous espace  $G$  des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables.

**Preuve :** Soit  $Z \in G$ . En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle du théorème 4.2, on a :

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XZ|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})Z)$$

donc  $\langle X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}), Z \rangle = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})Z) = 0$ . □

## 4.4 Application au calcul de prix d'options

Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une marche aléatoire et soit  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$  la filtration associée; rappelons que la filtration associée à une m.a. est par définition la suite croissante de tribus

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0^X \subset \mathcal{F}_{\delta t}^X \subset \dots \subset \mathcal{F}_T^X \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

définie de la façon suivante : pour chaque  $t \in \mathbb{T}$ , les atomes de la tribu  $\mathcal{F}_t^X$  sont les classes d'équivalence pour la relation :

$$\omega' \stackrel{t}{\sim} \omega'' \text{ si et seulement si } X_s(\omega') = X_s(\omega'') \text{ pour tout } s \in [0..t].$$

L'exemple de filtration importante pour nous et la filtration associée à la marche CRR est détaillé au chapitre 3.

On a vu ci-dessus comment associer à une v.a.  $X$  son espérance conditionnellement à une tribu,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) =: Y$ . Si l'on dispose non plus d'une seule tribu mais de toute une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on peut associer alors, à toute v.a.  $X$ , une famille, indexée par  $t \in \mathbb{T}$ , de variables aléatoires  $Y_t := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ , c'est-à-dire une nouvelle marche aléatoire  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

Prenons l'exemple d'une option européenne standard  $(T, \varphi(S_T))$  souscrite sur un actif  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . La fonction de paiement  $X := \varphi(S_T)$  est une v.a. sur l'ensemble des états du monde  $\Omega$  sur lequel est définie la m.a.  $(S_t)$ . On peut donc associer à l'option une nouvelle m.a. donnée par  $Y_t := \mathbb{E}(\varphi(S_T)|\mathcal{F}_t)$ . Que représente  $Y_t$  par rapport à  $X := \varphi(S_T)$ ? Pour chaque état du monde  $\omega \in \Omega$ ,  $Y_t(\omega)$  est l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\bar{\omega}$ , où  $\bar{\omega}$  désigne l'atome de la tribu  $\mathcal{F}_t$ , c'est-à-dire l'ensemble des états du monde correspondant à des trajectoires de la marche  $(S_t)$  qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$ . En d'autres termes,  $Y_t(\omega)$  est la moyenne des paiements attendus sur toutes les trajectoires qui coïncident avec  $\omega$  jusqu'à l'instant  $t$ , ou la moyenne des paiements futurs sachant la trajectoire  $S_s$  jusqu'à l'instant  $t$ , c'est-à-dire connaissant l'information jusqu'à  $t$ . Notons que l'on a  $\mathbb{E}(\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T^S) = \varphi(S_T)$  (car  $\varphi(S_T)$  est  $\mathcal{F}_T^S$ -mesurable) et  $\mathbb{E}(\varphi(S_T)|\mathcal{F}_0^S) = \mathbb{E}(\varphi(S_T))$  (car  $\mathcal{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}$ ).

En fait, par le choix de  $p = \frac{R-d}{u-d}$  et des lois des  $\delta J = (\delta J_i)_{i=1..n}$ , le nombre  $\mathbb{E}(\varphi(S_T)|\mathcal{F}_t^S)(\omega)$  est précisément le prix du portefeuille de couverture à l'instant  $t$ , lorsque l'action vaut  $S_t(\omega)$ . En d'autres termes, en utilisant la notion d'espérance conditionnelle par rapport aux tribus de la filtration des prix du sous-jacent, il est possible de calculer le prix d'une option, non seulement à l'instant  $t = 0$  mais à tout instant  $t \in \mathbb{T}$  : c'est la *formule fondamentale* qui généralise celle donnée au chapitre 2 pour  $t = 0$ . La seule hypothèse que nous faisons sur l'option est qu'elle soit européenne d'échéance  $T$ , c'est à dire qu'elle paye sa valeur  $\Pi_T$  à la date  $T$  et que cette valeur ne dépendent que des valeurs de  $S$  jusqu'à cette date, c'est-à-dire qu'elle soit  $\mathcal{F}_T^S$ -mesurable; par exemple  $\Pi_T = \varphi(S_T)$  pour une option vanille de fonction de paiement  $\varphi$ .

**Théorème 4.4** *Considérons un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où l'actif risqué  $S$  suit un modèle CRR et l'actif sans risque est donné par  $B_t := e^{rt}$ . Considérons une option européenne d'échéance  $T$  et de valeur  $\Pi_T$  qui est  $\mathcal{F}_T^S$ -mesurable. Pour tout  $t \in \mathbb{T} = [0..T]$  la valeur  $\Pi_t$  du portefeuille de couverture est donnée par*

$$\Pi_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\Pi_T | \mathcal{F}_t^S) \quad (4.3)$$

où  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à la m.a.  $S = (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  et où l'espérance conditionnelle est calculée sous la probabilité de calcul définie par  $p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$ . En particulier, la prime de l'option est égale à  $\Pi_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\Pi_T)$ .

Rappelons que le calcul du prix  $\Pi_t(\omega)$  du portefeuille de couverture s'effectue par récurrence rétrograde à partir de sa valeur finale  $\Pi_T$ , supposée  $\mathcal{F}_T^S$ -mesurable, c'est à dire que  $\Pi_T(\omega)$  est fonction des valeurs  $s_{\delta t}, s_{2\delta t}, \dots, s_T$  des  $S_t(\omega)$  pour  $t \in \mathbb{T}$ . De fait, plus généralement,  $\Pi_t$  est  $\mathcal{F}_t^S$ -mesurable, c'est à dire une fonction (dépendant de  $t$ ) des  $s_{\delta t}, \dots, s_t$ ; en effet supposons que ce soit le cas pour  $t + \delta t$  :

$$\Pi_{t+\delta t}(\omega) = \pi(t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}),$$

et plaçons-nous à la date  $t$ , lorsque nous savons que  $S_t(\omega) = s_{\delta t}, \dots, S_t(\omega) = s_t$ . Dans ce cas  $S_{t+\delta t}(\omega) = s_{\delta t}u$  ou  $S_{t+\delta t}(\omega) = s_{\delta t}d$  et le calcul élémentaire vu au chapitre 2 nous montre que la valeur du portefeuille de couverture à la date  $t$  se déduit des deux valeurs correspondantes  $\pi(t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}u)$  et  $\pi(t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}d)$  à  $t + \delta t$  par la formule

$$\Pi_t(\omega) = \frac{1}{R} (p\pi(t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}u) + (1-p)\pi(t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}d)) =: \pi(t, s_{\delta t}, \dots, s_t) \quad (4.4)$$

avec  $R := e^{r\delta t}$  et  $p := \frac{R-d}{u-d}$ , et qui est bien une fonction des seules valeurs de  $S_s(\omega)$  pour  $s \leq t$ . Reformulons ce résultat en termes d'espérance conditionnelle :

**Lemme 4.5**

$$\Pi_t = \frac{1}{R} \mathbb{E}(\Pi_{t+\delta t} | \mathcal{F}_t^S). \quad (4.5)$$

**Preuve :** Pour tout  $\omega \in \Omega$ , soient  $s_{i\delta t} := S_{i\delta t}(\omega)$ ,  $i = 1..n$ . Rappelons que  $\bar{\omega}_t$  est l'atome de  $\omega$  dans la tribu  $\mathcal{F}_t^S$ ,

$$\bar{\omega}_t = \{\omega' \in \Omega \mid S_{\delta t}(\omega') = s_{\delta t}, \dots, S_t(\omega') = s_t\}.$$

Par définition de l'espérance conditionnelle nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Pi_{t+\delta t} | \mathcal{F}_t^S)(\omega) \\ &= \mathbb{E}(\Pi_{t+\delta t} \mathbb{I}_{\bar{\omega}_t}) \frac{1}{\mathbb{P}(\bar{\omega}_t)} \\ &= \mathbb{E} \left( \pi \left( t + \delta t, S_{\delta t}, \dots, S_t, S_t d (u/d)^{\delta J_{t+\delta t}} \right) \mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}} \right) \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}})} \\ &= \mathbb{E} \left( \pi \left( t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_t d \left( \frac{u}{d} \right)^{\delta J_{t+\delta t}} \right) \mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}} \right) \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}})} \\ &= \mathbb{E} \left( \pi \left( t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_t d \left( \frac{u}{d} \right)^{\delta J_{t+\delta t}} \right) \right) \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}})}{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{\delta t}=s_{\delta t}\}} \cdots \mathbb{I}_{\{S_t=s_t\}})}, \text{ par indépendance,} \\ &= p\pi(t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}u) + (1-p)\pi(t + \delta t, s_{\delta t}, \dots, s_t, s_{t+\delta t}d), \text{ puisque } \delta J_{t+\delta t} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p), \\ &= R \pi(t, s_{\delta t}, \dots, s_t), \text{ par (4.4),} \\ &= R \pi(t, S_{\delta t}, \dots, S_t)(\omega) = R \Pi_t(\omega). \end{aligned}$$

□

La preuve du théorème s'en déduit facilement par transitivité de l'espérance conditionnelle : posons  $t = i\delta t$ ; par  $n - i$  applications du lemme on obtient

$$\Pi_t = \frac{1}{R} \mathbb{E} \left( \frac{1}{R} \mathbb{E} \left( \dots \frac{1}{R} \mathbb{E}(\Pi_T | \mathcal{F}_{T-\delta t}^S) \dots \mid \mathcal{F}_{t+\delta t}^S \right) \mid \mathcal{F}_t^S \right) = \frac{1}{R^{n-i}} \mathbb{E}(\Pi_T | \mathcal{F}_t^S) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\Pi_T | \mathcal{F}_t^S).$$



## Chapitre 5

# Martingales, arbitrage et complétude

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique<sup>1</sup> ; elle était déjà présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer. Ce n'est qu'à la fin des années 70 et au début des années 80 (dans un séries d'articles de M. J. Harrison, D. M. Kreps et S. R. Pliska) que l'on a commencé à comprendre les liens entre les notions économiques ou financières d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude du marché et la notion mathématique de martingale. Ce sont ces liens que nous étudions ici à travers notamment deux résultats importants parfois appelés les deux théorèmes fondamentaux de la finance mathématique.

### 5.1 Martingales

Intuitivement, une martingale est une marche aléatoire n'ayant ni tendance haussière ni tendance baissière, sa valeur à chaque instant étant égale à l'espérance de ses valeurs futures. On utilise des marches aléatoires ayant cette propriété pour modéliser le prix des actifs financiers car un prix de marché est un nombre sur lequel deux parties, celle qui achète et celle qui vend, tombent d'accord ; si le prix avait une tendance à la hausse, le vendeur n'aurait pas accepté la transaction et inversement s'il avait une tendance à la baisse c'est l'acheteur qui l'aurait refusé. Donc il est naturel de supposer qu'un *fair-price* a la propriété de martingale. Cela n'entraîne nullement que le prix ne varie pas car, selon l'état du monde qui se réalise, il augmente effectivement ou bien diminue. Mais lorsque l'on prend en compte l'ensemble des états du monde possibles, il est raisonnable de supposer que sa variation espérée est nulle. Bien sûr, les véritables variations du prix qui interviendront dans la réalité, et qui dépendent de l'état du monde, seront certainement non nulles. D'ailleurs, c'est parce que les deux parties n'ont pas les mêmes anticipations sur l'état du monde qui va se réaliser que la transaction a lieu.

**Définition :** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé fini et soit  $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration de  $\Omega$ . On dit qu'une marche aléatoire  $M := (M_t)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale (mtg) si et seulement si

$$\text{pour tous } s \leq t, M_s = \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s). \quad (5.1)$$

Observons qu'il résulte de la définition de l'espérance conditionnelle qu'une  $\mathcal{F}$ -martingale est toujours une marche aléatoire  $\mathcal{F}$ -adaptée, c'est-à-dire que, pour tout  $t$ , la v.a.  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

La proposition suivante donne trois autres caractérisations de la propriété de martingale, souvent utiles, qui découlent également des propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise la notation  $\mathbb{E}_s X := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_s)$ .

**Proposition 5.1** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.  $M$  est une martingale.
2. Pour tout  $s \in \mathbb{T}$ ,  $M_s = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t})$ .
3. Pour tout  $s \in \mathbb{T}$ ,  $M_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable et  $\mathbb{E}_s(\delta M_{s+\delta t}) = 0$ , où  $\delta M_{s+\delta t} := M_{s+\delta t} - M_s$ .
4. Pour tout  $s \leq t$  dans  $\mathbb{T}$ ,  $M_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable et  $\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Voir le livre de Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998

**Preuve :** On fait une démonstration "circulaire" : la propriété 1 entraîne évidemment 2 et si la propriété 2 est vraie, on a :

$$\mathbb{E}_s(M_{s+\delta t} - M_s) = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t}) - M_s = M_s - M_s = 0.$$

D'où la propriété 3. Si celle-ci est vraie, alors

$$\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = \mathbb{E}_s \left( \sum_{\tau=s}^{t-\delta t} (M_{\tau+\delta t} - M_\tau) \right) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t} \mathbb{E}(\delta M_{\tau+\delta t}) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t} \mathbb{E}_s(\mathbb{E}_\tau(\delta M_{\tau+\delta t})) = 0.$$

D'où la propriété 4. On vérifie enfin que la propriété 4 implique à son tour la propriété 1 car, comme  $M_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable  $M_s = \mathbb{E}_s(M_s)$ , et donc  $M_s - \mathbb{E}_s(M_t) = \mathbb{E}_s(M_s - M_t) = 0$ .  $\square$

### Exemples :

1. Le premier exemple est celui de la  $p$ -marche de Wiener  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$  pour laquelle on a par définition :

$$\mathbb{E}(\delta W_t) = p\sqrt{\delta t} + (1-p)(-\sqrt{\delta t}) = (2p-1)\sqrt{\delta t}.$$

Donc c'est une martingale (par rapport à la filtration qui lui est associée) si et seulement si  $p = \frac{1}{2}$ .

2. Le second exemple est celui de la marche aléatoire de Cox, Ross et Rubinstein  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  qui modélise le prix d'un actif financier à l'instant  $t$ . Pour trouver une probabilité  $p = P(S_{t+\delta t}/S_t = u)$  telle que sa valeur actualisée soit une martingale, on procède de la façon suivante : si  $r$  désigne le taux d'escompte monétaire, supposé constant, et  $\tilde{S}_t$  le prix actualisé,  $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t$ , on a les relations suivantes que doit satisfaire  $p$  :

$$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}(pS_t u + (1-p)S_t d) = e^{-r\delta t}(pu + (1-p)d)\tilde{S}_t.$$

Donc  $\tilde{S}_t$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale pourvu que  $pu + (1-p)d = e^{r\delta t}$ . On retrouve la probabilité risque neutre introduite pour évaluer le prix d'options :

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

Dans le modèle CRR, la probabilité risque neutre est donc l'unique probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent est une martingale.

3. Le troisième exemple est celui d'une martingale fermée par une v.a. : si  $\Phi$  est une v.a. sur un espace probabilisé muni d'une filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , la marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  définie par  $X_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$  est, par construction, une martingale. De façon générale, on dit qu'une  $\mathcal{F}$ -martingale  $M_t$  est une martingale *fermée par la v.a.  $\Phi$*  si elle s'écrit  $M_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$  pour une certaine v.a.  $\Phi$ . C'est une façon naturelle de construire une martingale et c'est ce que nous avons fait à travers la formule fondamentale pour la marche  $\tilde{C}_t$ . Nous avons vu en effet que

$$C_t = e^{r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$$

ce qui s'écrit encore  $e^{rt}C_t = \mathbb{E}(e^{rT}\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$ . Ainsi la formule fondamentale indique qu'à tout instant  $t$ , le prix actualisé  $\tilde{C}_t$  d'une option européenne  $(T, \varphi(S_T))$  est la martingale fermée par la v.a.  $\varphi(\tilde{S}_T)$ .

**Proposition 5.2** *Si  $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une martingale, alors  $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$  est constant et pour tout  $t \in \mathbb{T}$  on a  $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ . En particulier si  $M_0$  est une v.a. constante, égale au nombre  $M_0$ , on a pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}(M_t) = M_0$ .*

De cette proposition appliquée à la martingale  $(\tilde{C}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on déduit immédiatement que la valeur de la prime  $C_0$  est l'espérance du payoff  $\tilde{C}_T = \varphi(\tilde{S}_T)$ .

Pour finir ce paragraphe, indiquons la définition de sur- et sous-martingale, utile notamment pour l'étude des options américaines.

**Définition :** On dit qu'une m.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une  $\mathcal{F}$ -sous<sup>2</sup>-martingale si et seulement si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -adaptée et

$$\text{pour tous } s \leq t, X_s \leq \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s). \quad (5.2)$$

On définit de façon analogue les  $\mathcal{F}$ -surmartingales. Evidemment une m.a. qui est à la fois une sur- et une sous-martingale est une martingale.

<sup>2</sup>retenir que toute valeur  $X_s$  de la marche est "sous" ( $\leq$ ) l'espérance (conditionnelle) de toute valeur future ( $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ ).

## 5.2 Marché et “pertes et profits” d’un portefeuille

Le fait que les valeurs actualisées des deux actifs (risqué et non risqué) qui composent le portefeuille de couverture d’une option soient des martingales entraîne automatiquement, comme nous allons le voir maintenant, qu’il en est de même de la valeur de ce portefeuille autofinancé. Ceci fournit d’ailleurs une nouvelle façon de se convaincre que la valeur actualisée de l’option (qui par définition est le prix d’un portefeuille de couverture) est elle-même une martingale.

Ce résultat important est en fait valable non seulement lorsqu’on ne dispose que de deux actifs, l’un risqué et l’autre non risqué, mais plus généralement lorsque l’on dispose de  $d + 1$  actifs, d’où la généralisation proposée maintenant.

**Définition :** Un *marché financier* est la donnée de  $(d + 1)$  marches aléatoires  $(S_t^1, \dots, S_t^d; B_t)$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  muni d’une filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , telles que :

- $(B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est déterministe (par exemple  $B_t = e^{rt}$ ) : elle modélise un actif non risqué.
- $(S_t^1)_{t \in \mathbb{T}}, \dots, (S_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$  sont  $\mathcal{F}$ -adaptées : elles modélisent  $d$  actifs risqués.

Pour définir la notion de portefeuille dans un tel marché financier, il est utile d’introduire la notion de marche aléatoire prévisible.

**Définition :** Une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dite *prévisible par rapport à une filtration  $\mathcal{F}$*  si, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable.

Rappelons qu’une v.a. est  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable lorsqu’elle est connue dès qu’on connaît l’information dont on dispose à l’instant  $t - \delta t$ , information représentée par la tribu  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ . L’exemple typique de m.a. prévisible que nous considérerons est la m.a.  $\alpha_t$  qui représente la composition en actif sous-jacent d’un portefeuille de couverture d’une option. En effet on supposera cette composition choisie à l’instant  $t - \delta t$  au vu du prix atteint par l’actif sous-jacent à cet instant et maintenue inchangée jusqu’à l’instant  $t$ , date à laquelle le détenteur du portefeuille réajuste sa position au vu de la nouvelle valeur atteinte par l’actif sous-jacent à cette date.

**Définition :** On appelle *portefeuille*  $\Pi = (\Pi_t)_{t \in \mathbb{T}}$  (ou *stratégie de portefeuille*) une famille de  $d + 1$  m.a. prévisibles  $\Pi_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d; \beta_t) = (\alpha_t; \beta_t)$  et *valeur* du portefeuille (ou de la stratégie)  $\Pi$  la quantité

$$V_t^\pi = \alpha_t^1 S_t^1 + \dots + \alpha_t^d S_t^d + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Il est utile d’introduire, à côté des prix des actifs ou des portefeuilles leurs *prix actualisés*, de façon à pouvoir comparer leurs valeurs à des instants  $t$  différents. On désigne par  $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$  et  $\tilde{V}_t^\pi := \frac{V_t^\pi}{B_t}$  ces valeurs actualisées. On a alors

$$\tilde{V}_t^\pi = \alpha_t \cdot \tilde{S}_t + \beta_t.$$

Remplacer dans les calculs les prix des actifs  $S_t^i$  par leurs valeurs actualisées  $\tilde{S}_t^i$  correspond à ce que l’on appelle parfois “travailler en Euros constants” c’est-à-dire choisir comme numéraire le prix de l’actif non risqué  $B_t$  et donc exprimer les autres prix en fonction de celui-ci. On supposera aussi désormais que  $B_0 = 1$ .

Une propriété importante des portefeuilles que nous considérons, que possèdent notamment les portefeuilles destinés à couvrir une option, est d’être autofinancés, c’est-à-dire que, lors de la recomposition à chaque instant  $t \in \mathbb{T}$ , les modifications se font sans apport ni retrait de fonds. Cette propriété s’exprime par l’identité suivante :

**Définition :** Un portefeuille  $\Pi_t = (\alpha_t; \beta_t)$  est dit *autofinancé ssi* pour tout  $t = 0, \dots, T - \delta t$ , on a :

$$\alpha_{t+\delta t} \cdot S_t + \beta_{t+\delta t} B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t. \quad (5.3)$$

Une autre façon d’évaluer la valeur d’un portefeuille autofinancé est d’étudier ses “pertes et profits”, c’est-à-dire la somme accumulée des gains et pertes réalisés, en raison des variations de la valeur des actifs qui le composent.

**Définition :** On appelle *pertes et profits*, noté  $P\&P_t$ , d’un portefeuille  $\Pi_t = (\alpha_t; \beta_t)$  la quantité

$$P\&P_t(\alpha) := \sum_{s=\delta t}^t \alpha_s (\delta \tilde{S}_s) \text{ où } \delta \tilde{S}_s = \tilde{S}_s - \tilde{S}_{s-\delta t}.$$

**Proposition 5.3** *Pour un portefeuille autofinancé, on a la propriété suivante :*

$$\tilde{V}_t^\pi = V_0^\pi + P\&P_t.$$

**Preuve :** Par (5.3) pour  $t = s - \delta t$ , on a  $V_{s-\delta t}^\pi = \alpha_s \cdot S_{s-\delta t} + \beta_s B_{s-\delta t}$ , et donc

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^\pi &= \sum_{s=\delta t}^t \delta \tilde{V}_s^\pi + \tilde{V}_0^\pi = \frac{V_0^\pi}{B_0} + \sum_{s=\delta t}^t \left( \frac{V_s^\pi}{B_s} - \frac{V_{s-\delta t}^\pi}{B_{s-\delta t}} \right) \\ &= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^t \frac{1}{B_s} (\alpha_s \cdot S_s + \beta_s B_s) - \frac{1}{B_{s-\delta t}} (\alpha_s \cdot S_{s-\delta t} + \beta_s B_{s-\delta t}) \\ &= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^t (\alpha_s \cdot \tilde{S}_s + \beta_s) - (\alpha_s \cdot \tilde{S}_{s-\delta t} + \beta_s) = V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^t \alpha_s \cdot \delta \tilde{S}_s = V_0^\pi + P\&P_t. \end{aligned}$$

□

Si l'on suppose que  $\tilde{S}_t$  est une martingale, la somme  $\sum_{s=\delta t}^t \alpha_s (\delta \tilde{S}_s)$  s'appelle la *transformée de la martingale*  $\tilde{S}_t$  par la marche aléatoire prévisible  $\alpha_t$ . Cette somme est une version discrète de l'*intégrale stochastique* de la marche  $\alpha_t$  contre les variations de la martingale  $\tilde{S}_t$ . Cette somme est elle-même une martingale comme nous allons le voir maintenant.

### 5.3 Marchés sans arbitrage

Pour simplifier, on suposera dans ce paragraphe et le suivant que le taux d'intérêt  $r$  est nul. Ce n'est guère réaliste mais une fois les résultats exposés ici bien compris dans ce cas particulier, il est facile de les généraliser au cas général où  $r$  n'est pas nul.

Dans la suite, on notera pour simplifier  $\alpha_t$  le vecteur de composantes du portefeuille  $\Pi_t = (\alpha_t ; \beta_t)$ . On parlera indifféremment de portefeuille ou de stratégie.

**Définition :** On dit qu'un portefeuille est un *portefeuille d'arbitrage* (ou une *opportunité d'arbitrage* ou simplement un *arbitrage*) si  $P\&L_T^S(\alpha) \geq 0$ , et s'il existe un état du monde au moins  $\omega_0 \in \Omega$  tel que  $P\&L_T^S(\alpha)(\omega_0) > 0$ .

En d'autres termes, un arbitrage est un portefeuille tel que même lorsque sa valeur initiale est nulle, sa valeur en  $T$  est toujours positive ou nulle et même strictement positive dans au moins un état du monde. C'est donc une stratégie (qu'on appelle aussi parfois *free lunch*) qui est gagnante dans certains cas et ceci sans prendre aucun risque puisqu'elle n'est jamais perdante.

Dans la modélisation des marchés financiers, on admettra généralement qu'une telle stratégie n'existe pas. C'est l'hypothèse dite d'*absence d'opportunité d'arbitrage*. On explique souvent cette hypothèse en disant que si d'aventure une opportunité d'arbitrage apparaissait quelque part le marché se chargerait de la faire disparaître presque aussitôt. Il n'est donc pas déraisonnable de supposer qu'à l'*équilibre* il n'en existe pas.

Le théorème suivant est souvent appelé le *premier théorème fondamentale*. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un marché soit sans arbitrage. Le fait que cette condition soit suffisante est assez facile à prouver. La preuve de la réciproque (la condition est nécessaire) est plus élaborée et cette réciproque n'est d'ailleurs plus vraie telle quel lorsqu'on quitte le monde des modèles discrets ( $\Omega$  fini) pour celui des modèles continus (il en existe toutefois une généralisation dans le cas continu aussi).

**Théorème 5.4** *Un marché financier  $(S_t^1, \dots, S_t^d ; B_t)$  est sans arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité  $\mathbb{P}^*$ , avec  $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , telle que tous les actifs actualisés  $(\tilde{S}_t^1, \dots, \tilde{S}_t^d ; \tilde{B}_t)$  soient des martingales sous cette probabilité. Cette probabilité  $\mathbb{P}^*$  s'appelle probabilité de martingale ou probabilité risque neutre.*

Avant de démontrer ce théorème, étudions un exemple que l'on peut trouver dans le livre de Pliska :

**Exemple :** C'est un exemple à une étape (c'est-à-dire un pas de temps unique  $\delta t = T$ ) et pour lequel on n'a qu'un seul actif risqué  $S_t$  défini par  $S_0 = 5$  et  $S_{\delta t} \in \{3, 4, 6\}$ . Comme habituellement on suppose  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et on désigne par  $p = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\}$ ,  $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\}$ , and  $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\}$ . Dans ce cas, il est facile de voir que pour que  $S = (S_t)_{t \in \{0, T\}}$  soit une martingale il faut que (on rappelle que  $r = 0$ ) :

$$5 = S_0 = \mathbb{E}^*(S_{\delta t} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^*(S_{\delta t}) = p3 + q4 + (1 - p - q)6 = 6 - 3p - 2q,$$

ou, ce qui revient au même, que  $q = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}p$  (et  $1 - p - q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$ ). Finalement  $S$  est une martingale si  $3p + 2q = 1$  et  $\mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\} = p \in (0, \frac{1}{3})$ . Les valeurs possibles pour les deux autres probabilités en découlent :  $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\} \in (0, \frac{1}{2})$  et  $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\} \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . Donc, le théorème 5.4 affirme que ce modèle est sans arbitrage si et seulement si  $p \in (0, \frac{1}{3}) =: (p^{*-}, p^{*+})$ . En d'autres termes, il y a un ensemble des probabilités de martingale pour ce modèle qui forment un segment du type  $(\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-3\lambda}{2}, \lambda)$ ,  $\lambda \in [0, \frac{1}{3}]$ .

On retiendra qu'en dehors de ces probabilités de martingale (qui donneront chacune un prix d'option différent) aucune probabilité n'est acceptable car toute autre probabilité conduirait à un modèle présentant des opportunités d'arbitrage. Nous revenons sur la question de la non unicité au prochain paragraphe.

**Preuve : Première partie :** Pour montrer que l'existence d'une probabilité de martingale entraîne l'absence d'opportunité d'arbitrage (qui est la partie facile de la preuve), nous utiliserons le résultat suivant :

**Proposition 5.5** *Si  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité de martingale et  $\alpha$  une stratégie autofinancée alors le processus de pertes et profits associé à cette stratégie,  $P\&P(\alpha)$ , est aussi une  $\mathbb{P}^*$ -martingale.*

**Preuve :** On fait la preuve dans le cas d'un seul actif risqué ( $S_t$ ) pour simplifier. Pour montrer que  $P\&P(\alpha)$  est une martingale on utilise la troisième propriété de la proposition 5.1. On a :

$$\delta(P\&P(\alpha))_{t+\delta t} = \sum_{s \in (0..t+\delta t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s - \sum_{s \in (0..t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s = \alpha_{t+\delta t} S_{t+\delta t}.$$

Mais  $\alpha$  est  $\mathcal{F}_t$ -prévisible, donc  $\alpha_{t+\delta t} \in \mathcal{F}_t$ , donc

$$\mathbb{E}(\delta P\&P_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\alpha_{t+\delta t} \delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \alpha_{t+\delta t} \mathbb{E}(\delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = 0,$$

cette dernière espérance étant nulle puisque  $S$  est martingale sous  $\mathbb{P}^*$  par hypothèse.  $\square$

Pour prouver l'absence d'opportunité d'arbitrage, considérons un portefeuille  $\alpha$  vérifiant  $P\&P_0(\alpha) = 0$  et vérifions que  $P\&P_T(\alpha)$  est nécessairement d'espérance nulle (et non strictement positive). Comme  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité de martingale, le processus  $P\&P_t(\alpha)$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale. Donc  $P\&P_0(\alpha) = \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)$ ; mais comme  $P\&P_0(\alpha) = 0$ , on a

$$\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = \mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}^*(P\&P_0(\alpha)) = \mathbb{E}^*(0) = 0.$$

Donc cette stratégie ne peut être un arbitrage, ce qui prouve la première partie du théorème.  $\square$

**Preuve : deuxième partie :** Pour montrer l'existence d'une probabilité de martingale lorsque le marché est sans arbitrage, nous renvoyons le lecteur au livre de Lamberton et Lapeyre.  $\square$

## 5.4 Marchés complets et non complets

On a vu que lorsqu'on modélise les actifs financiers par des m.a. CRR avec la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage  $d < R < u$ , on peut construire, pour toute option européenne  $(T, \varphi(S_T))$ , un portefeuille autofinancé qui couvre l'option. On dit aussi de ce portefeuille qu'il *duplique* l'option puisque son prix est, à chaque instant, égal à celui de l'option, ou bien que celle-ci est *duplicable*.

**Définition :** Si  $\Phi$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, on dit que  $\Phi$  est *duplicable* s'il existe un portefeuille autofinancé tel que  $V_T^\pi = \Phi$ .

Si l'on choisit d'autres modèles que des modèles CRR pour décrire les actifs présents sur le marché, rien n'indique, a priori, que n'importe quelle option souscrite sur un de ces actifs, sera duplicable.

**Définition :** Un marché où toute option est duplicable s'appelle un *marché complet*. Sinon, on parle de marché *incomplet*.

Une question naturelle se pose : comment calculer le prix d'une option (non nécessairement duplicable) dans un marché incomplet ? La première règle est de se placer dans un marché sans arbitrage (on parle de marché *viable*) et dans ce cas, le théorème précédent affirme l'existence d'au moins une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales. On peut alors définir dans ce cas des prix de sur et sous couverture (non uniques) et on pourra vérifier (deuxième théorème fondamental) que seuls les marchés complets auront la propriété d'unicité du prix de couverture que nous avons rencontré dans le cas du modèle CRR.

**Définition :** Soit  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration représentant l'information disponible du marché que l'on suppose sans arbitrage. Un nombre  $x \in \mathbb{R}$  est appelé un *prix de surcouverture* pour une v.a.  $\Phi$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable (telle que le pay off d'une option) s'il existe une stratégie  $\alpha$  telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \geq \Phi ; \quad (5.4)$$

De même  $x$  est un *prix de souscouverture* pour  $\Phi$  s'il existe une stratégie  $\alpha$  telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \leq \Phi. \quad (5.5)$$

**Proposition 5.6** *Soit un modèle sans arbitrage, soit  $\mathbb{P}^*$  une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales et soit  $\Phi$  un pay off  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Alors pour tout prix de surcouverture  $x^+$  et tout prix de souscouverture  $x^-$  on a :*

$$x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi) \leq x^+.$$

**Preuve :** Soit une stratégie de surcouverture  $\alpha$  telle que  $x^+ + P\&P_T^S(\alpha) \geq \Phi$ . Comme  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité de martingale,  $\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = 0$ . Donc

$$\mathbb{E}^*(\Phi) \leq \mathbb{E}^*(x^+ + P\&P_T(\alpha)) \leq x^+ + \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = x^+.$$

On montrerait que  $x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi)$  de la même façon en utilisant cette fois une stratégie de souscouverture.  $\square$

Ce résultat montre que tout *prix de non arbitrage*  $x^* := \mathbb{E}^*(\Phi)$  obtenu comme espérance du pay off pour une probabilité de martingale est borné supérieurement par n'importe quel prix de surcouverture et aussi borné inférieurement par n'importe quel prix de souscouverture. Posons :

$$\begin{aligned} x_X^+ &:= \text{Min} \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de surcouverture pour } \Phi\} \\ x_X^- &:= \text{Max} \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de souscouverture pour } \Phi\}. \end{aligned}$$

Nous venons de voir que  $x^* \in [x_X^-, x_X^+] \neq \emptyset$ ; cet intervalle est appelé l'intervalle des prix de non arbitrage. Notons que, comme  $\Omega$  et  $[0..T]_{\delta t}$  sont finis, le Max et le Min sont atteints, donc il existe des stratégies  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  telles que  $x_X^- + P\&P_T(\alpha^-) \leq \Phi \leq x_X^+ + P\&P_T(\alpha^+)$ , et il existe  $\omega^-$  et  $\omega^+$  (possiblement égaux) tels que  $x_X^\pm + P\&L_T^S(\alpha^\pm)(\omega^\pm) = \Phi(\omega^\pm)$ .

**Remarque :** Dans l'exemple de Pliska, on avait  $(p^{*-}, p^{*+}) := (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . On peut ainsi vérifier que pour un Call à la monnaie  $\varphi(S_T) := (S_T - S_0)^+$ , on a  $x^+ = \mathbb{E}^+(\varphi(S_T))$  et  $x^- = \mathbb{E}^-(\varphi(S_T))$ , où  $\mathbb{E}^+$  est l'espérance par rapport à la probabilité  $p = p^{*+}$  et de même pour  $\mathbb{E}^-$ . On calcule alors facilement  $P\&P_T(\alpha^+) - \varphi(S_T) + x^+$  et  $P\&L_T^S(\alpha^-) - \varphi(S_T) + x^-$ .

Le théorème suivant est parfois appelé le deuxième théorème fondamental.

**Théorème 5.7** *Un marché sans arbitrage est complet si et seulement s'il n'existe qu'une seule probabilité de martingale (et donc un seul prix).*

**Preuve :** voir Lambertson Lapeyre page 19 et 20.  $\square$

**Remarque :** Vendre une option à n'importe quel prix  $x > x^+$  permet de faire un arbitrage. En effet il suffit de garder la prime  $x$  et d'appliquer une stratégie  $\alpha^+$ . A l'instant final  $T$  on a  $P\&L_T^S(\alpha^+)(\omega) \geq \Phi(\omega) - x^+$ , pour l'état du monde  $\omega$  qui s'est réalisé. On paie alors  $\Phi(\omega)$  et on garde  $x$ , et on a donc  $x + P\&L_T^S(\alpha^+)(\omega) - \Phi(\omega) \geq x - x^+$ . Il reste au moins la quantité strictement positive  $x - x^+ > 0$  pour un "free-lunch".

On peut montrer comment obtenir de même un "free-lunch" en achetant une option de pay off  $\Phi$  à un prix  $x < x^-$ .

# Chapitre 6

## Options américaines

Alors qu'une option européenne ne donne à son détenteur le droit d'exercer (et d'obtenir le pay-off) qu'à un instant fixé  $T$ , l'option américaine correspondante lui donne ce droit à tout instant  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = n\delta t\}$  compris entre 0 et  $T$ . Par exemple un call européen sur l'actif  $S_t$  rapportera  $(S_T - K)^+$  à la date  $T$  et le call américain sur le même actif sous-jacent rapportera, s'il est exercé à la date  $t$ , le pay-off  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ . Nous allons dans cette leçon apprendre à calculer le prix d'une option américaine et au passage nous découvrirons quelques beaux outils du calcul stochastique comme le théorème d'arrêt optimal ou la décomposition de Doob-Meyer des surmartingales.

### 6.1 Calcul du prix par récurrence rétrograde

Comme précédemment, le processus  $(S_t)$ , défini pour tout  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = N\delta t\}$ , représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps, et on le suppose adapté par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  qui représente l'information disponible à l'instant  $t$ . Désignons par  $U_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une option américaine dont le pay-off est noté  $\varphi(S_t)$  (s'il exerce son option à l'instant  $t$ , le détenteur de l'option reçoit  $\varphi(S_t)$ ). Comment évaluer son prix ?

On le détermine de proche en proche à partir de la valeur finale la valeur minimale d'un portefeuille de couverture. Tout d'abord, si l'option n'a pas été exercée avant la date finale  $T$ , elle vaudra en  $t = T$  le pay-off  $\varphi(S_T)$ . A l'instant précédent  $t = T - \delta t$ , le vendeur devra pour se couvrir disposer d'une richesse au moins égale au pay-off  $\varphi(S_{T-\delta t})$ , pour le cas où le détenteur de l'option l'exercerait à cette date, et en même temps au moins égale à  $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})$  qui est le prix d'un portefeuille de couverture lui permettant de faire face à ses obligations à la date  $T$  si le détenteur ne vient pas exercer avant  $T$ . On peut donc écrire pour le prix de l'option américaine en  $T - \delta t$  :

$$U_{T-\delta t} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_T/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \}$$

Mais on peut reproduire ce raisonnement pour l'instant  $t = T - 2\delta t$ , et ainsi de suite. On obtient ainsi la relation de récurrence rétrograde suivante :

$$\begin{cases} U_t &= \text{Max} (\varphi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)) \\ U_T &= P_T \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans le cas d'une option européenne, par exemple un Call, on déduit facilement de la relation de récurrence  $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$  la formule fondamentale  $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(C_T/\mathcal{F}_t)$  indiquant que la valeur de l'option à l'instant  $t$  est l'espérance actualisée de son pay-off. Dans le cas d'une option américaine, on ne déduit pas facilement de cette relation (A.2) la valeur de  $U_t$  directement comme une fonction de  $t$  et du pay-off final  $\varphi(S_T)$  mais nous verrons qu'il existe néanmoins une formule fermée de ce type, quoique moins explicite. Par contre, il est facile de programmer cette récurrence pour calculer la prime  $U_t$  à tout instant  $t$ .

On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correspondante puisqu'elle donne plus de droits. La différence entre les deux s'appelle la *prime d'exercice anticipé* (*early exercise premium*). Dans quels cas a-t-on intérêt à exercer de façon anticipée c'est-à-dire dans quels cas cette prime est-elle strictement positive ? Nous allons voir que ce n'est jamais le cas pour un Call, sauf si l'actif sous-jacent distribue des dividendes et que par contre c'est généralement le cas pour un Put, à moins de pouvoir supposer nul le taux d'intérêt  $r$  (ce qui ne serait pas très réaliste).

**Proposition 6.1** *En supposant que l'actif sous-jacent  $S_t$  ne distribue pas de dividende, le prix d'un Call américain sur  $S_t$  est égal au prix du Call européen de même date et même prix d'exercice. Autrement dit, la prime d'exercice anticipée est nulle.*

**Preuve :** On déduit de (A.2) que pour tout  $t$ ,  $U_{t+\delta t} \geq \varphi(S_{t+\delta t})$ . L'espérance conditionnelle et l'actualisation conservant cette inégalité, il en résulte que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t} \mathbb{E}(\varphi(S_{t+\delta t}) / \mathcal{F}_t).$$

Comme  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$  est une fonction convexe de  $S_t$ , l'inégalité de Jensen<sup>1</sup> implique que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - e^{-r\delta t} K)^+.$$

Mais comme la valeur actualisée de  $S_t$  est une martingale,  $e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = S_t$ , et donc

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (S_t - e^{-r\delta t} K)^+ \geq (S_t - K)^+ = \varphi(S_t),$$

la dernière inégalité résultant simplement du fait que  $-e^{-r\delta t} \geq -1$ . Des deux termes du maximum de (A.2), le second reste, pour tout  $t$ , supérieur ou égal au premier. Il n'y a donc pas d'intérêt à exercer l'option avant la date finale  $T$ .  $\square$

On notera que si l'on remplace dans ce calcul le pay-off du Call  $(S_t - K)^+$  par celui du Put  $(K - S_t)^+$ , la dernière inégalité cesse d'être satisfaite dès que  $r > 0$ . Et, de fait, si l'exercice anticipé n'est jamais intéressant dans le cas du Call, il l'est souvent dans celui du Put (sauf si  $r = 0$ ), comme nous allons le voir maintenant.

## 6.2 Théorème d'arrêt optimal

Rien dans la formule de récurrence (A.2) ne permet aisément au détenteur de l'option américaine de savoir à quel moment un exercice anticipé pourrait être intéressant pour lui. En réalité, il existe une courbe dans l'espace  $(t, S_t)$  appelée la *frontière d'exercice* (voir la figure 6.1) qui a la propriété suivante : aussi longtemps que le cours de l'actif sous-jacent  $S_t$  ne franchit pas cette courbe, un exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option) mais dès que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il est même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations plus ou moins facilement. D'un point de vue théorique, on peut montrer que cette frontière d'exercice est le lieu d'un temps d'arrêt appelé *temps d'arrêt optimal*. On a le théorème suivant :

**Théorème 6.2** *Si  $\mathcal{T}(t, T)$  désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans  $[t..T]_{\delta t}$ , le prix à l'instant  $t$  de l'option américaine de pay-off  $\varphi(S_t)$  est donnée par*

$$U_t = \text{Max}_{\tau \in \mathcal{T}(t, T)} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\varphi(S_\tau) / \mathcal{F}_t)$$

la maximum étant atteint pour le temps d'arrêt  $\tau_t$  défini par

$$\tau_t := \text{Min} \{s \in [t..T]_{\delta t} \text{ , } U_s = \varphi(S_s)\}.$$

Notons qu'en particulier, si on applique ce théorème au cas où  $t = 0$ , la prime d'une option américaine  $U_0$  est égale à  $U_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ , où  $\tau_0$  est le premier instant où le prix de l'option est égal au pay-off, c'est-à-dire le premier instant où le maximum de la formule (A.2) est égal au premier des deux termes. Plus précisément, tant que ce maximum est égal au second terme (espérance des valeurs futures), il n'est pas intéressant d'exercer, mais au premier instant où le pay-off dépasse la valeur de la couverture, il convient d'exercer.

**Preuve :** Pour simplifier, voici la preuve dans le cas particulier où  $t = 0$  le cas général étant très semblable.

On introduit la valeur actualisée de l'option américaine  $\tilde{U}_t$  définie par  $\tilde{U}_t = e^{-rt} U_t$  et on considère  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}(\omega)$  qui est égale à  $\tilde{U}_t(\omega)$  aussi longtemps que  $t < \tau_0(\omega)$  et à une constante  $\tilde{U}_{\tau_0(\omega)}(\omega)$  pour tout

<sup>1</sup>pour  $\varphi$  convexe,  $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$ , puisque l'hypergraphe de  $\varphi$  est convexe - observer comment sont localisés  $\mathbb{E}(X, \varphi(X))$  et  $(\mathbb{E}(X), \varphi(\mathbb{E}(X)))$ ; dans notre contexte finitaire,  $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}(Y | \bar{\omega}_t)$ , où  $\bar{\omega}_t$  désigne l'atome de  $\omega$  dans l'algèbre  $\mathcal{F}_t$ .



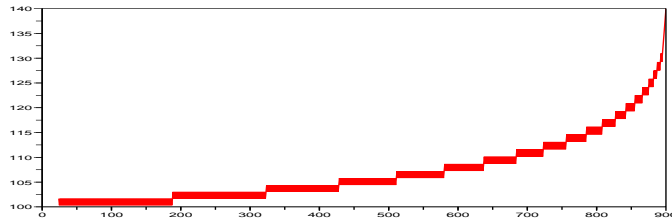


FIG. 6.1 – Tracé de la frontière d'exercice du put américain à la monnaie dans un modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 1$ , et  $n = 900$ .

$t \geq \tau_0(\omega)$ . Cette marche est appelée la marche  $\tilde{U}$  arrêtée au temps  $\tau_0$ . Nous allons vérifier que cette marche est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale : par définition de  $\tau_0$ , comme  $1 = \mathbb{I}_{t < \tau_0} + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0}$  et ces deux indicatrices étant  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, puisque  $\tau_0$  est un  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) &= \mathbb{I}_{t < \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{t-\delta t} - \tilde{U}_t) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{\tau_0} - \tilde{U}_{\tau_0}) / \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Or sur  $\{t < \tau_0\}$ ,  $\tilde{U}_{t-\delta t} = \mathbb{E}(\tilde{U}_t / \mathcal{F}_{t-\delta t})$  d'après (A.2) et donc le premier terme est nul. C'est évidemment le cas aussi du second donc  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}$  est bien une martingale.

Il en résulte que  $\tilde{U}_{0 \wedge \tau_0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{T \wedge \tau_0})$  et donc que l'on a bien  $U_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ .

Il reste à vérifier que pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}(t, T)$ ,  $\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$ . On a bien en effet

$$\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) = U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}(U_\tau) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$$

la première inégalité résultant du fait qu'une surmartingale arrêtée (ici il s'agit de  $\tilde{U}_{t \wedge \tau}$ ) est encore une surmartingale (exercice) et la seconde du fait que pour tout  $t$  on a  $U_t \geq \varphi(S_t)$  d'après (A.2).  $\square$

**Remarque :** Si l'on désigne comme nous l'avons fait pour  $U_t$ , par  $\widetilde{\varphi}(S_t)$  le pay-off actualisé, la formule (A.2) peut s'écrire plus simplement

$$\tilde{U}_t = \max\{\widetilde{\varphi}(S_t), \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}.$$

On peut alors vérifier que  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et plus précisément que cette formule la définit comme la plus petite surmartingale qui majore le pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi}(S_t)$ . C'est ce que l'on appelle l'enveloppe de Snell de ce pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi}(S_t)$ .

Le théorème précédent est en fait un théorème général qui permet d'exprimer toute enveloppe de Snell comme une martingale obtenue en arrêtant de façon appropriée la surmartingale constituée par cette enveloppe de Snell.

### 6.3 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas, que le détenteur exerce de façon anticipé ou non. Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutôt d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation*. En effet, tant que la frontière d'exercice n'a pas été franchie, la prime  $U_0$ , investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option américaine. Une fois la frontière d'exercice franchie (si cela a lieu), il y a deux possibilités. Soit le détenteur de l'option l'exerce, il récupère le pay-off et l'option cesse d'exister. Soit il n'exerce pas (il n'a pas noté le franchissement de la frontière d'exercice, ou il a mieux à faire) et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au pay-off et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant. Ce "revenu" durera

aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontière d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de consommation et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une *surcouverture* qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas.

Il y a une façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de *Décomposition de Doob-Meyer*.

**Théorème 6.3** *Soit  $\tilde{U}_t$  une  $\mathcal{F}_t$ -surmartingale. Il existe une marche aléatoire  $A_t$  croissante et prévisible (c'est-à-dire telle que pour tout  $t$   $A_t$  soit  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable) telle que*

$$\tilde{U}_t = M_t - A_t$$

où  $M_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale. Cette décomposition de  $\tilde{U}_t$  s'appelle sa décomposition de Doob-Meyer.

**Preuve :** La démonstration de ce théorème est particulièrement simple dans le cas discret où nous nous plaçons ici. On définit les deux marches  $A_t$  et  $M_t$  de la façon suivante :

$$A_0 := 0 \quad A_{t+\delta t} := A_t + \mathbb{E}(\tilde{U}_t - \tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

et

$$M_0 := 0 \quad M_{t+\delta t} := M_t + \tilde{U}_{t+\delta t} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

Puis on vérifie qu'elles satisfont les propriétés annoncées. Tout d'abord  $A_t$  est croissante car  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et est prévisible par construction. D'autre part on a :

$$\mathbb{E}(M_{t+\delta t} - M_t / \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) / \mathcal{F}_t) = 0$$

en appliquant simplement la linéarité et la transitivité de l'espérance conditionnelle. D'où le fait que  $M_t$  soit une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.  $\square$

Dans le théorème suivant, on note, pour simplifier,  $Z_t$  le pay-off actualisé de l'option américaine.

**Théorème 6.4** *Soit  $Z_t$  un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$  et soit  $\tilde{U}_t$  son enveloppe de Snell. Soit  $\tilde{U}_t = M_t - A_t$  la décomposition de Doob-Meyer de  $\tilde{U}_t$ . Alors le temps d'arrêt optimal  $\tau_0$  défini par  $\tau_0 = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \text{ , } U_s = Z_s\}$  est égal au temps d'arrêt  $\tau_A = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \text{ , } A_{s+\delta t} \neq 0\}$  si  $A_T \neq 0$  et  $\tau_0 = T$  sinon.*

Ce théorème affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est à dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant  $A_t$  cesse d'être nul. Ce processus apparaît donc comme représentant précisément la consommation. En effet, dès que la frontière d'exercice est franchie, si le détenteur n'exerce pas l'option, la valeur de l'option cesse d'être la valeur d'un portefeuille autofinancé et commence à générer une consommation égale au processus croissant  $A_t$ . C'est cette consommation qui fait de l'option américaine une surmartingale (et non une martingale comme l'option européenne) et du portefeuille de couverture une surcouverture (et non une couverture exacte comme pour l'option européenne).

**Preuve :** La preuve montre successivement que  $\tau_A \geq \tau_0$  et que  $\tau_A \leq \tau_0$ .

– Soit  $t \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_A = t\}$ ,  $A_t = 0$  et  $A_{t+\delta t} \neq 0$ . Donc  $\tilde{U}_t = M_t - A_t = M_t$  et  $\tilde{U}_{t+\delta t} = M_{t+\delta t} - A_{t+\delta t} < M_{t+\delta t}$ . Donc

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) < \mathbb{E}(M_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = M_t = \tilde{U}_t.$$

Comme  $\tilde{U}_t = \text{Max}\{Z_t, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}$ , ceci entraîne que  $\tilde{U}_t = Z_t$ . Donc, par définition de  $\tau_0$ ,  $\tau_A \geq \tau_0$ .

– Soit  $s \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_0 = s + \delta t\}$ ,  $U_{s+\delta t} = Z_{s+\delta t}$  et  $\tilde{U}_s > Z_s$ . Donc, comme  $A_t$  est prévisible,

$$\tilde{U}_s = \mathbb{E}(\tilde{U}_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{s+\delta t} - A_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = M_s - A_{s+\delta t} = \tilde{U}_s + A_s - A_{s+\delta t}$$

Donc  $A_{s+\delta t} = A_s$ , d'où  $\tau_A \leq \tau_0$ .  $\square$

# Chapitre 7

## Options barrières

Dans cette leçon, on va étudier l'exemple le plus simple d'option *exotique*, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat. De telles options s'appellent aussi des options *dépendant du chemin*. L'étude des options barrières sera aussi l'occasion de rencontrer la notion de *temps d'arrêt* et surtout le joli *principe de réflexion* d'André.

### 7.1 Définitions et exemples

Une option barrière  $(T, \varphi(S_T), L)$  est un produit dérivé sur un actif sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  pour lequel le versement de la fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  à l'échéance  $T$  est soumis au fait que l'actif sous-jacent ait franchi ou non, durant la durée de vie du contrat, vers le haut ou vers le bas, une barrière  $L$  donnée. Il existe une grande variété d'option barrière; on peut ranger les plus courantes en deux catégories :

- **les knock-out** : l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche la barrière.
- **les knock-in** : l'option n'est activée que si le sous-jacent touche la barrière.

Par ailleurs, ces options s'appellent put, call, options binaires, etc, ..., selon que  $\varphi(S) = (K - S)^+$ ,  $\varphi(S) = (S - K)^+$ ,  $\varphi(S) = \mathbb{I}_{S > K}$ , etc, ... Voici quelques exemples :

- Un *down and out call* (DOC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'est jamais descendu en dessous de  $L$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *down and in put* (DIP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  seulement si celui-ci est descendu en dessous de  $L$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *up and out put* (UOP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'a jamais dépassé le niveau  $L$  pendant la durée de vie du contrat.

Il existe de même des options DIC, UIC, UIP, DOP et UOC, mais aussi des options avec doubles barrières et bien d'autres. Souvent le contrat prévoit une *rebate*, somme payée en cash, dans le cas où l'option est out.

Le principal intérêt des options barrières est qu'elles sont moins chères que les options ordinaires correspondantes, environs quatre fois moins chères, car elles laissent à l'acheteur, et d'ailleurs aussi au vendeur, un risque résiduel. Par exemple pour une option DIC, la couverture qu'un call offre par rapport à une envolée du cours du sous-jacent est tout simplement perdue dans le cas où celui-ci n'a pas franchi la barrière. Mais ce risque est jugé suffisamment improbable par celui qui accepte de le prendre ou bien il considère que ses conséquences sont acceptables au regard de l'économie qu'il procure. Pour le vendeur, l'un des intérêts est que, comme les options barrières se négocient uniquement de gré à gré (et non sur les marchés organisés comme c'est le cas pour les put et les call ordinaires), il peut prendre en général des marges plus élevées car le marché des produits OTC (over the counter) est moins tendu.

A titre d'exemple, considérons une entreprise qui va recevoir dans 6 mois en Euros des revenus perçus en Yen et qui craint qu'une dépréciation du Yen par rapport à l'Euro dans les mois à venir vienne mettre en péril le niveau de ces revenus. Elle peut acheter un put à 6 mois qui lui donnera le droit de vendre des Yens en Euros à un prix fixé, par exemple égal au cours actuel. Mais si l'entreprise achète une option DIP, avec une barrière  $L$  peu inférieure au prix d'exercice  $K$ , cela lui en coûtera bien moins chère et cela lui assurera la même couverture contre une dépréciation du Yen, sauf dans le cas où à aucun moment

donné durant ces 6 mois, le cours ne descend en dessous de  $L$ . Mais ce cas correspond à une situation où la dépréciation redoutée est restée très limitée et le risque résiduel peut donc être jugé sans gravité.

Ce sont des situations de ce type qui conduisent au développement du marché des options barrières; celles-ci constituent plus de 10% de l'activité sur le marché des changes par exemple.

## 7.2 Mesurabilité et temps d'arrêt

Rappelons que si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé,  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , on dit qu'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est *mesurable* par rapport à  $\mathcal{T}$ , ou qu'elle est  $\mathcal{T}$ -mesurable, si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$ . Il est clair que si  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable est nécessairement constante et si  $A$  étant une partie de  $\Omega$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable aura au plus deux valeurs. Plus généralement, on a la proposition suivante :

**Proposition 7.1** *Lorsque  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé fini et  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , une v.a. est  $\mathcal{T}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de la tribu  $\mathcal{T}$ .*

Il est aussi utile de connaître la notion de *tribu engendrée par une v.a.* dont nous rappelons la définition :

**Définition :** Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , on appelle *tribu engendrée* par  $X$ , notée  $\sigma(X)$ , la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle  $X$  est mesurable. Plus généralement si  $X_1, X_2, \dots, X_m$  est une suite de v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , la tribu engendrée par cette suite de v.a., notée  $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_m)$  est la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle toutes les v.a.  $X_i, i = 1, \dots, m$ , sont mesurables.

**Exemple :** On a vu qu'on peut associer à toute marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  telle que, pour un  $t \in \mathbb{T}$  donné, les atomes de  $\mathcal{F}_t$  sont formés des états du monde  $\omega \in \Omega$  dont les trajectoires  $X(\omega)$  coïncident jusqu'à l'instant  $t$ . On se convainc facilement que les v.a.  $X_t$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables et aussi  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour tout  $s \geq t$  mais  $X_t$  n'est généralement pas  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour  $s < t$ . Intuitivement la propriété d'être  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour une v.a. sur  $\Omega$  signifie simplement,  $\mathcal{F}_t$  représentant l'information dont on dispose à l'instant  $t$ , que cette v.a. ne dépend que de l'information dont on dispose à cet instant ou plus simplement qu'elle est *connue* à l'instant  $t$ , mais qu'elle ne peut pas prévoir l'avenir, c'est-à-dire distinguer (en leur donnant des valeurs différentes) deux trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$  mais ne coïncideraient plus au delà.

En particulier il est facile de voir que si  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à une m.a.  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de Cox-Ross-Rubinstein,  $S_T$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable de même que toute v.a. de la forme  $\varphi(S_T)$  où  $\varphi$  est une fonction (déterministe) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :** Il y a un point un peu subtil qu'il est important de noter ici : pour une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , les deux tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma(X_t)$  ne sont pas égales. La première représente l'information dont on dispose jusqu'à l'instant  $t$  et la seconde l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . En réalité on a  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_{\delta t}, \dots, X_{t-\delta t}, X_t)$  et donc  $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$  mais cette inclusion est stricte. Une v.a. qui est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, donne donc nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide jusqu'à l'instant  $t$  et donc, en particulier la même valeur pour deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , alors qu'une v.a.  $\sigma(X_t)$ -mesurable donne la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , mais pas nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$  mais pas à un instant antérieur.

La notion de *temps d'arrêt* formalise l'idée d'un instant où quelque chose se produit, par exemple le passage d'une barrière, sans que cela ait lieu nécessairement au même instant sur toutes les trajectoires : en ce sens c'est une temps *aléatoire* puisque sa valeur dépend de l'état du monde.

**Définition :** Si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration, une v.a.  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$  est un *temps d'arrêt* si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

On peut vérifier que la condition "pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ " est équivalente à la précédente. L'exemple suivant est l'un des exemples de temps d'arrêt les plus utilisés :

**Exemple :** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  sa filtration associée et  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sous ensemble quelconque. La v.a. suivante qui représente le *premier instant d'entrée d'une trajectoire dans le sous ensemble  $A$*  est un temps d'arrêt :

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \text{Min} \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par contre on voit facilement que la v.a. suivante n'est pas un temps d'arrêt :

$$\theta(\omega) := \begin{cases} \text{Max}\{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La caractérisation suivante des temps d'arrêt est souvent très utile :

**Proposition 7.2** *Si  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  la filtration associée, une v.a.  $\tau$  est un temps d'arrêt si et seulement si*

$$[\tau(\omega) = t \text{ et } \omega' \stackrel{t}{\sim} \omega] \Rightarrow \tau(\omega') = t$$

En utilisant cette caractérisation, on montre par exemple que si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux temps d'arrêt alors  $\tau \wedge \tau' := \text{Min}(\tau, \tau')$  est encore un temps d'arrêt, de même que  $\tau + c$ , où  $c$  est une constante.

### 7.3 Calcul du prix d'une option DIC

Pour calculer le prix d'une DIC, nous allons supposer comme précédemment que l'actif sous-jacent suit un modèle CRR mais nous choisissons cette fois un taux d'escompte  $r = 0$  pour simplifier.

**Définition :** Soit  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. CRR sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  et soit  $L > 0$ . La v.a. suivante est un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  associée :

$$\tau_L(\omega) := \begin{cases} \text{Min}\{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} \neq \emptyset \\ T + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $S_t(\omega)$  est la trajectoire correspondant à l'état du monde  $\omega$ ,  $\tau_L(\omega)$  désigne donc le premier instant qui suit le franchissement de la barrière  $L$  si cet instant précède  $T$  et il vaut  $T$  si la trajectoire ne franchit pas la barrière avant  $T$ . On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un temps d'arrêt en utilisant la caractérisation donnée par la proposition 7.2.

Ce temps d'arrêt permet d'exprimer par une formule la valeur à l'échéance ou payoff d'une option DIC :

**Définition :** Une down and in call (DIC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR  $(S_t)$  a pour valeur à l'échéance :

$$\psi_T = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L \leq T}$$

où  $\mathbb{I}_{\tau_L \leq T}$  est la v.a. sur  $\Omega$  qui vaut 1 si  $\tau_L \leq T$  et 0 sinon.

On a vu lors des leçons précédentes comment calculer le prix d'une option  $(T, \varphi(S_T))$  sur un sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de type CRR : c'est la formule fondamentale (proposition 4.3). Dans ce cas le payoff  $\varphi(S_T)$  est une v.a.  $S_T$ -mesurable c'est-à-dire que  $\varphi(S_T)$  est connu dès qu'on connaît la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$ . Dans le cas d'une option barrière, la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$  ne suffit pas pour calculer le payoff, il faut en plus connaître la trajectoire suivie par  $S_t$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  puisqu'il faut savoir si celle-ci a franchi la barrière ou non. Cela signifie que la valeur de l'option à l'échéance n'est plus  $\sigma(S_T)$ -mesurable mais bien  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Rappelons la formule fondamentale :

**Proposition 7.3** *Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, en supposant le taux d'escompte nul, le prix à l'instant  $t = 0$  d'une option  $(T, \psi_T)$ , où  $\psi_T$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, est donnée par  $\psi_0 = \mathbb{E}(\psi_T)$ , c'est-à-dire qu'il est égal à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, de sa fonction de paiement. En particulier, le prix d'une DIC est  $\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L \leq T})$*

La preuve de cette proposition consiste simplement à appliquer le théorème 4.4 en utilisant la  $\mathcal{F}_T$ -mesurabilité du payoff.

Il reste cependant à calculer l'espérance  $\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L \leq T})$ . C'est pour faire cela qu'on utilise le principe de symétrie d'André.

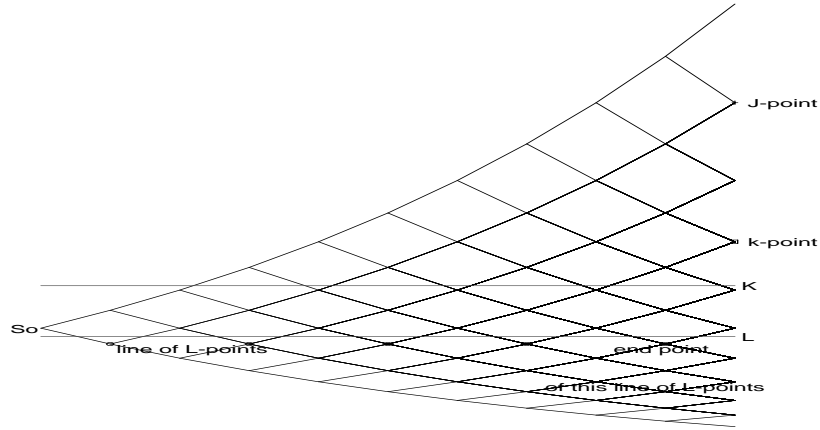


FIG. 7.1 – La ligne des  $L$ -points est la ligne de noeuds de l'arbre située sur ou immédiatement en-dessous de la barrière d'ordonnée  $L$ . Elle a pour ordonnée  $S_0 u^{J-n}$  où le nombre  $J$  défini par 7.1 a un sens intéressant : c'est le nombre maximal de  $up$  que peut présenter à l'instant final une trajectoire qui a franchi la barrière. Parmi ces trajectoires, celle qui aboutit (pour  $i = n$ ) au point le plus élevé, noté  $J$ -point sur la figure, commence par  $n - J$  *down*, pour atteindre la ligne de  $L$ -points, puis ne présente plus que des  $up$ .

## 7.4 Evaluation par le principe d'André

Pour évaluer cette espérance et donc l'exprimer comme une somme finie, on va utiliser le principe de symétrie d'André qui permet de calculer le nombre de trajectoires d'une marche binomiale qui atteignent un niveau terminal donné en ayant franchi une barrière fixée. Ce principe classique est lié au problème combinatoire appelé *The Ballot problem* et son utilisation pour l'évaluation d'options barrières, maintenant classique, est joliment exposée par exemple dans [12].

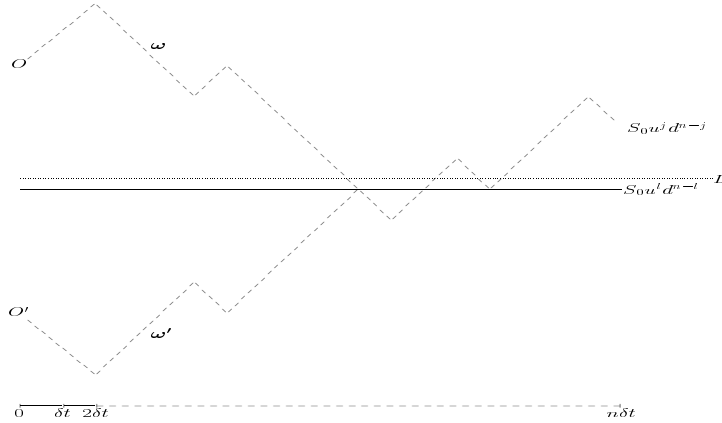
Il est utile de faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur le modèle du sous-jacent : supposer que  $d = 1/u$ . Les valeurs prises par  $S_t$  lorsque  $t = n\delta t$  s'écrivent alors  $S_t = S_0 u^{2j-n}$  et, en fait, cette hypothèse entraîne que les noeuds de l'arbre sont alignés horizontalement. Le niveau de la barrière  $L$  se trouve alors située entre deux lignes (horizontales) de noeuds de l'arbre. On attache son attention à la ligne de noeuds située immédiatement en dessous de  $L$  puisque toute trajectoire qui franchit la barrière passe nécessairement par l'un des noeuds de cette ligne de noeuds. Elle a pour ordonnée  $S_0 u^{J-n}$ , où  $J$  est le plus grand entier  $m \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $S_0 u^{m-n} \leq L$ , qui vaut (voir figure 7.1)

$$J := \left\lceil n + \frac{\ln \frac{L}{S_0}}{\ln u} \right\rceil = n + \left\lfloor \frac{\ln \frac{L}{S_0}}{\ln u} \right\rfloor \quad (7.1)$$

où  $[z]$  désigne la partie entière de  $z$ , c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur au nombre  $z$ . En fait, il y a deux cas de figure : soit le point le plus à droite de cette ligne de noeuds, notée *end point* sur la figure, est un point d'abscisse  $T = n\delta t$  et son ordonnée s'écrit  $S_0 u^{l d^{n-l}} = S_0 u^{J-n}$ , pour un  $J = 2l$  pair, soit son extrémité est un point d'abscisse  $T - \delta t = (n-1)\delta t$  et son ordonnée s'écrit  $S_0 u^{l d^{(n-1)-l}} = S_0 u^{J-n}$  pour un  $J = 2l + 1$  impair. A noter que dans les deux cas, l'entier  $l$  (qui vaut  $J/2$  ou  $(J-1)/2$  selon la parité de  $J$ ) est défini par

$$l := \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{\ln \frac{L}{S_0}}{2 \ln u} \right\rfloor. \quad (7.2)$$

Le principe de symétrie d'André, illustré par la figure 7.2 (dans le cas où la ligne de noeuds située immédiatement sous la barrière a pour extrémité un point d'abscisse  $T = n\delta t$  (cas où  $J$  est pair)) consiste en la remarque suivante : le nombre de trajectoires issues de  $O$  qui atteignent le niveau  $j$  en  $t = T$ , en ayant franchi la barrière, est égal au nombre de trajectoires issues du point  $O'$ , symétrique de  $O$  par

FIG. 7.2 – Illustration du principe de symétrie d'André dans le cas où  $J = 2l$  est pair.

rapport à la ligne de noeuds située immédiatement sous la barrière, et qui atteignent ce même niveau. Comme  $j$  représente le nombre de *up* d'une trajectoire issue de  $O$  (et  $n - j$  le nombre de *down*), on vérifie sans mal que si une trajectoire notée  $\omega$  a  $j$  *up*, sa symétrique notée  $\omega'$  en aura  $j'$  avec  $j' = j + n - J$ . Donc, si  $J/2 \leq j \leq J$ , le nombre de trajectoires cherché est  $\binom{n}{j+n-J}$ , ce qui s'écrit encore  $\binom{n}{j-j}$ . Par ailleurs on voit immédiatement que si le niveau terminal  $j$  est tel que  $0 \leq j \leq J/2$ , toute trajectoire issue de  $O$  doit franchir la barrière pour atteindre ce niveau (donc le nombre de trajectoires cherché est simplement  $\binom{n}{j}$ ), et enfin si  $j > J$  aucune trajectoire issue de  $O'$  ne peut atteindre ce niveau.

D'où le lemme 7.4 suivant dans le cas où  $J$  est pair. Dans le cas où  $J = 2l + 1$  est impair (cas non représenté sur la figure), on retrouve les mêmes formules. En effet le nombre de trajectoires issues de  $O$  qui atteignent le niveau  $j$  à l'instant final  $t = n\delta t$ , en ayant franchi la barrière, est égal à la somme du nombre de trajectoires ayant atteint le niveau  $j - 1$  à l'instant précédent  $t = (n - 1)\delta t$  (en ayant franchi la barrière) et de trajectoires ayant atteint le niveau  $j$  à l'instant précédent  $t = (n - 1)\delta t$  (en ayant franchi la barrière). Donc ce nombre est la somme  $\binom{n-1}{j+n-1-J} + \binom{n-1}{j+n-J}$ , soit encore  $\binom{n}{j-j}$  :

**Lemme 7.4** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $J \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq J \leq n$ . Le nombre de trajectoires de la marche aléatoire binaire  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  telles que  $S_{n\delta t} = S_0 u^{2j-n}$  (c'est-à-dire qui atteignent l'ordonnée  $S_0 u^{2j-n}$  à l'instant  $t = n\delta t$ ) en ayant franchi la ligne de noeuds d'ordonnée  $S_0 u^{J-n}$  à un instant quelconque entre  $t = 0$  et  $t = n\delta t$  est égal à :

$$A(j, J) = \begin{cases} 0 & \text{si } J < j \leq n \\ \binom{n}{J-j} & \text{si } J/2 \leq j \leq J \\ \binom{n}{j} & \text{si } 0 \leq j \leq J/2 \end{cases}$$

La preuve de ce lemme combinatoire est laissée en exercice. On en déduit le théorème suivant qui donne le prix d'une option DIC à l'instant initial comme une somme finie. On verra que cette somme n'a pas la même forme selon que  $L \leq K$  ou que  $K \leq L$ . Par ailleurs, comme le prix de l'option dépend du niveau de son prix d'exercice  $K$ , il convient aussi de repérer  $K$ , tout comme  $L$ , par rapport aux noeuds de l'arbre. Pour cela on introduit l'entier  $k$  qui correspond à la ligne de noeuds de l'arbre, ayant une extrémité d'abscisse  $n\delta t$ , située immédiatement au dessus du prix d'exercice  $K$  :

$$k = \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{\ln \frac{K}{S_0}}{2 \ln u} \right\rceil + 1. \quad (7.3)$$

**Théorème 7.5** Une down and in call (DIC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  souscrite sur un actif modélisé par une m.a.  $(S_t)$  a pour valeur initiale :

· dans le cas où  $L \leq K$  :

$$DIC_0 = e^{-rT} \sum_{j=k}^J \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K). \quad (7.4)$$

· dans le cas où  $K \leq L$  :

$$DIC_0 = e^{-rT} \left\{ \sum_{j=k}^l \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) + \sum_{j=l+1}^J \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) \right\}. \quad (7.5)$$

**Preuve :** Notons  $S(j)$  le nombre  $S(j) := S_0 u^{2j-n}$ . On a par définition :

$$\begin{aligned} DIC_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L \leq T}) \\ &= e^{-rT} \left( \sum_{j=0}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L \leq T\} (S(j) - K)^+ + \sum_{j=0}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L > T\} (0) \right) \end{aligned}$$

et donc, en introduisant l'entier  $k$  défini en (7.3) :

$$DIC_0 = e^{-rT} \sum_{j=k}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L \leq T\} (S(j) - K).$$

Mais toutes les trajectoires aboutissant au niveau  $j$  ont la même probabilité  $p^j (1-p)^{n-j}$ , et le nombre d'entre elles qui atteignent les noeuds en question est égal à  $A(j, J)$ , comme cela a été établi au lemme 7.4. Donc

$$P(S_T = s_j, \tau_L \leq T) = p^j (1-p)^{n-j} A(j, J) \quad (7.6)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } J < j \leq n \\ \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} & \text{if } J/2 \leq j \leq J \\ \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} & \text{if } 0 \leq j \leq J/2 \end{cases} \quad (7.7)$$

d'où les formules (7.4) et (7.5) selon que  $L \leq K$  ou que  $K \leq L$ .  $\square$

**Remarque :** Notons qu'on peut bien entendu établir, toujours à l'aide du même lemme, des formules analogues à celles du théorème 7.5 pour chacune des autres options barrière (voir l'article par F. Diener et E. Bagge intitulé *Calcul des asymptotiques des options barrières à*

<http://math1.unice.fr/Bibliotheque/MesPublis.html>).



## Chapitre 8

# Black-Scholes comme limite de CRR

Si l'on se pose la question de savoir si l'on a déjà vu une formule de mathématique publiée dans un journal grand public, on réalise que la réponse est très probablement "non" (on pense éventuellement à  $E = mc^2$  mais c'est une formule de physique). Pourtant en 1997, lorsque Black, Scholes et Merton reçurent le prix Nobel d'économie, la formule, connue aujourd'hui sous le nom de *formule de Black-Scholes*, fit la une du New York Times, signe de l'importance qu'elle avait (et a encore) pour le monde de la finance.

### 8.1 La formule de Black-Scholes

Voici cette formule dans le cas d'un Call (Européen) :

$$C_0 = S_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K e^{-rT} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (8.1)$$

où  $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$  et  $d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ .

Elle donne le prix à l'instant initial (la prime) d'un Call Européen de date d'exercice  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur un actif sous jacent de prix initial  $S_0$ , de volatilité  $\sigma$ , sachant que le taux sans risque est  $r$ . On notera que  $d_1$  et  $d_2$  sont des constantes qui vérifient  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ . Cette formule permet de calculer la prime du Call dès lors qu'on se donne les constantes  $T$ ,  $K$ ,  $S_0$ ,  $\sigma$  et  $r$  dont elle dépend.

On la réécrit souvent en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Elle s'écrit alors plus simplement  $C_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$ .

La formule correspondante pour une option Put (Européen) de mêmes paramètres est

$$P_0 = K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1). \quad (8.2)$$

A partir de ces deux expressions de prix de Call et de Put, on peut vérifier là encore la relation de parité Call-Put en utilisant les propriétés de symétrie de la loi normale, plus précisément en utilisant que l'on a  $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$  pour tout  $x$ .

### 8.2 Limite du prix CRR

On a vu que dans un modèle Cox, Ross et Rubinstein, la prime d'un Put (Européen), tout comme celle d'un Call, est égale à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du payoff actualisé :

$$P_0(n) = e^{-rT} \mathbb{E}\varphi(S_T)$$

où  $\varphi$  désigne ce payoff qui, dans le cas du Put, vaut  $\varphi(S) = (K - S)^+$ . Cette formule CRR permet, tout comme la formule de Black-Scholes, de calculer la prime du Put dès que l'on s'est donné les constantes  $T$ ,  $K$ ,  $S_0$ ,  $\sigma$  et  $r$ . La principale différence est que le prix dépend cette fois, en plus de ces constantes, du nombre  $n$  de pas de discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$ . D'où la notation adoptée à présent,  $P_0(n)$ . L'objet

de ce paragraphe est de montrer que, lorsque  $n$  tend vers l'infini, la limite de  $P_0(n)$  existe et qu'elle est précisément égale au prix Black-Scholes (formule (8.2)), c'est-à-dire de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbb{E}((K - S_T)^+) = Ke^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1). \quad (8.3)$$

L'équivalent, c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbb{E}((S_T - K)^+) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$  est vrai aussi dans le cas d'un Call et découlera du cas du Put en appliquant la relation de parité Call-Put. Le choix que nous faisons d'étudier ce passage à la limite dans le cas du Put apparaîtra plus loin.

Désignons par  $Z$  une v.a. prenant les deux valeurs  $-1$  et  $+1$  avec les probabilités  $1-p$  et  $p$  respectivement, où  $p$  est la probabilité risque neutre (égale à  $\frac{R-d}{u-d}$ , où  $R = e^{r\delta t}$ ,  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$  et  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ ). A noter que dans ce cas la loi de  $Z$  dépend de  $n$  puisque  $\delta t = \frac{T}{n}$  est fonction de  $n$ . On peut alors réécrire dans le modèle CRR la v.a.  $S_T$ , donnant le prix en  $t = T$  de l'actif sous-jacent, de la façon suivante : étant donnée une suite de v.a.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  indépendantes et ayant la même loi que  $Z$ ,  $S_T$  est égal à

$$S_T = S_0 e^{Z_1 \sigma \sqrt{\delta t}} e^{Z_2 \sigma \sqrt{\delta t}} \dots e^{Z_n \sigma \sqrt{\delta t}} = S_0 e^{\sigma \sqrt{T} \tilde{Z}_n}$$

où  $\tilde{Z}_n$  la v.a.  $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i$ . Donc si l'on pose  $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma \sqrt{T} z})^+$ , la limite que l'on veut calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbb{E}((K - S_T)^+)$  s'écrit simplement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbb{E}((K - S_T)^+) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} \mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)). \quad (8.4)$$

où  $f$  est la fonction définie précédemment qui est à la fois continue et bornée. Nous allons voir que cette dernière propriété de  $f$  est importante et on peut noter qu'elle ne serait plus vraie pour un Call (puisque dans ce cas le payoff n'est pas borné).

On a le résultat suivant :

**Proposition 8.1** Soient  $T, r, \sigma$  des constantes strictement positives,  $\delta t = \frac{T}{n}$ , et  $R, d$  et  $u$  les quantités  $R = e^{r\delta t}$ ,  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$  et  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ . Soit  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  une suite de v.a. indépendantes prenant deux valeurs  $-1$  et  $+1$  avec les probabilités  $1-p$  et  $p$  respectivement où  $p$  est la fonction de  $n$  donnée par  $p = \frac{R-d}{u-d}$ . Alors la suite  $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i$  converge en loi vers une v.a. de la forme  $\frac{\sqrt{T}}{\sigma} (r - \frac{\sigma^2}{2}) + \tilde{Z}$ , où  $\tilde{Z}$  suit une loi normale centrée et réduite.

Rappelons que, par définition, une suite de v.a.  $\tilde{Z}_n$  converge en loi vers  $\tilde{Z}$  si et seulement si, pour toute fonction  $f$  continue et bornée, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)) = \mathbb{E}(f(\tilde{Z}))$ . C'est cette caractéristique qui explique le choix du Put plutôt que celui du Call pour établir la convergence du prix CRR vers le prix BS.

**Preuve :** Mais nous n'allons pas utiliser cette définition de la convergence en loi pour prouver cette proposition. En effet, on sait aussi qu'il est équivalent de montrer que  $\tilde{Z}_n$  converge en loi vers  $\tilde{Z}$  ou que la fonction génératrice des moments de  $\tilde{Z}_n$ ,  $M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tau \tilde{Z}_n})$ , converge vers celle de  $\tilde{Z}$ ,  $M_{\tilde{Z}}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tau \tilde{Z}})$ . Or pour calculer la fonction génératrice des moments de  $\tilde{Z}_n$ , comme les v.a.  $Z_1, \dots, Z_n$  sont indépendantes de même loi que  $Z$ , on a

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Z}_n}(\tau) &= \mathbb{E}(e^{\tau \tilde{Z}_n}) = \mathbb{E}\left(e^{(\tau Z_1 + \tau Z_2 + \dots + \tau Z_n) \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\tau Z_1 \frac{1}{\sqrt{n}}} \dots e^{\tau Z_n \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\tau Z_1 \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \dots \mathbb{E}\left(e^{\tau Z_n \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \left(M_Z\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = M_Z^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

il suffit de calculer celle de la v.a.  $Z$  au point  $\frac{\tau}{\sqrt{n}}$ . Or  $Z$  ne prend que les deux valeurs  $-1$  et  $+1$  avec les probabilités  $1-p$  et  $p$  et vaut donc simplement

$$M_Z\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = (1-p)e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} + pe^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}}.$$

En se souvenant que  $p = \frac{R-d}{u-d}$  avec  $R = e^{r\delta t}$ ,  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$  et  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ , on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} \sqrt{\delta t} (1 + \varepsilon(\sqrt{\delta t})) \\ 1-p &= \frac{1}{2} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} \sqrt{\delta t} (1 + \varepsilon(\sqrt{\delta t})) \end{aligned}$$

où les  $\varepsilon(\sqrt{\delta t})$  désignent des fonctions possiblement distinctes qui tendent vers 0 quand  $\delta t$  tend vers 0 (et donc quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ). Comme on a aussi

$$e^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right),$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ , il en résulte que

$$M_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\tau^2 + 2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\tau\sqrt{T} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et donc que

$$M_Z^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(n \ln\left(M_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini (et donc  $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  vers 0), on a bien à la limite la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi  $\mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right), 1\right)$ . D'où la proposition.  $\square$

**Remarque :** Notons que si les  $Z_n$  avaient été identiquement distribués, c'est-à-dire de même loi (indépendante de  $n$ ), ce qui n'est pas le cas ici, on aurait pu utiliser le théorème de la limite central pour trouver la loi limite de  $\tilde{Z}_n$ . En effet, selon ce théorème, si  $\mu$  et  $s^2$  désignent l'espérance et la variance des  $Z_i$  (des constantes si les loi des  $Z_i$  sont identiques et indépendantes de  $n$ ), la suite de v.a.  $\frac{\tilde{Z}_n - n\mu}{s\sqrt{n}}$  converge en loi vers une v.a.  $Z_0$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Ce qui empêche l'application du théorème de la limite centrale ici est le fait que la suite de v.a.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  n'est pas *une* suite i.i.d. mais ce que l'on appelle un *vecteur triangulaire* en ce sens que, pour chaque  $n$ , la suite  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  est bien i.i.d. mais lorsque  $n$  varie, la suite change à la fois de longueur mais aussi de loi. Mais, à défaut de pouvoir utiliser le théorème de la limite central, on reprend l'idée de sa preuve pour en généraliser l'énoncé à le cas qui nous intéresse ici.

### 8.3 Convergence vers Black-Scholes

Pour vérifier que la limite du prix CRR est bien le prix Black-Scholes, il reste à vérifier que, si  $Z_0$  est une v.a. normale centrée réduite et si  $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$ , on a bien

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0e^{\sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}(\sqrt{nz} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{n})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0e^{\sigma\sqrt{nz}}e^{T(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

On peut vérifier que la quantité  $S_0e^{\sigma\sqrt{nz}}e^{T(r - \frac{\sigma^2}{2})} < K$  si et seulement si  $z < -d_2$ . D'où

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}K\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma\sqrt{nz} + T(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{z^2}{2}} dz\right) \\ &= e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right) \end{aligned}$$

en faisant dans le second terme le changement de variable  $y = z - \sigma\sqrt{T}$  pour lequel il est facile de voir que  $z \in ]-\infty, -d_2]$  si et seulement si  $y \in ]-\infty, -d_1]$ . D'où la formule cherchée

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

**Remarque :** Il est intéressant de noter qu'on peut réécrire la formule de prix du modèle CRR de façon à faire apparaître, comme pour la formule de Black-Scholes deux termes, que l'on peut lire comme la composition du portefeuille de couverture, le premier terme (en revenant au cas du Call) étant la partie investie en actif sous jacent et le second celle investie en actif non risqué (ou en cash). Sous cette forme on l'appelle la *formule exacte* de Cox, Ross et Rubinstein. Pour le voir, notons  $k$  l'entier défini par  $k := \text{Min} \{ j \in \mathbb{N} \mid S_0 u^j d^{n-j} > K \}$  et désignons par  $\Phi$  la *somme binomiale incomplète* définie par  $\Phi(k, n, p) := \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ . On a

$$\begin{aligned}
C_0(n) &= e^{-rT} \mathbb{E}(S_T - K)^+ = e^{-rT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+ \\
&= e^{-rT} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K) \\
&= S_0 e^{-rT} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (up)^j (d(1-p))^{n-j} - K e^{-rT} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= S_0 \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} - K e^{-rT} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} \\
&= S_0 \Phi(k, n, q) - K e^{-rT} \Phi(k, n, p)
\end{aligned}$$

où l'on a défini  $q$  par  $q = up e^{-r\delta t}$ . Il convient de vérifier que l'on a bien  $1 - q = d(1-p)e^{-r\delta t}$  et aussi que  $0 < q < 1$ . Ceci découle de la relation de martingale  $S = e^{-r\delta t}(pSu + (1-p)Sd)$ , du fait que  $0 < p < 1$  et aussi des inégalités d'absence d'opportunité d'arbitrage  $0 < d < e^{r\delta t} < u < 1$ .

En fait, il est aussi possible de montrer directement que  $\lim \Phi(k, n, q) = \mathcal{N}(d_1)$  et  $\lim \Phi(k, n, p) = \mathcal{N}(d_2)$  et d'obtenir ainsi directement la formule de Black-Scholes comme limite de la formule exacte de Cox, Ross et Rubinstein.

## 8.4 Vitesse de convergence

Sachant que la limite du prix Cox, Ross et Rubinstein est égale au prix Black-Scholes, on peut se demander comment se comporte le premier tend vers le second lorsque  $n$  tend vers l'infini. La convergence est-elle monotone, ou non, et surtout est-elle rapide ?

Si l'on représente sur un graphe du prix  $C_0(n)$  comme une fonction de  $n$ , on s'aperçoit (voir la figure ci dessous) que la convergence est très irrégulière et qu'elle ne semble pas particulièrement rapide. En réalité, on peut montrer que

$$C_0(n) - C_{BS} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

c'est-à-dire que cet écart tend vers zéro comme  $\frac{1}{n}$ , ce qui est assez rapide (dans le cas du théorème de la limite centrale, on attend plutôt une convergence en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ).

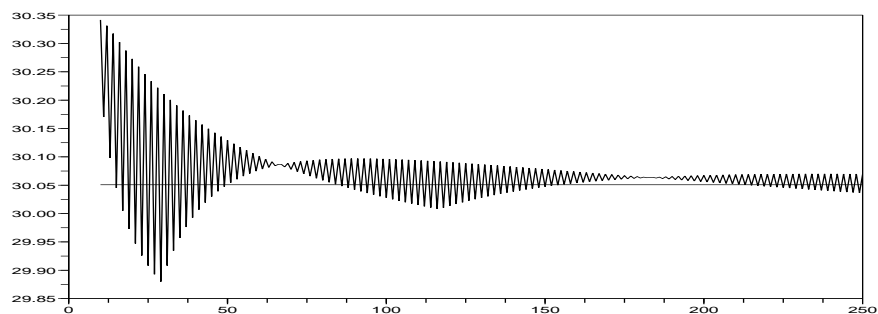


FIG. 8.1 – Tracé du prix Cox, Ross et Rubinstein  $C_0(n)$  d'un Call Européen en fonction de  $n$  et de sa limite, le prix Black-Scholes. Valeur des paramètres :  $S_0 = 140$ ,  $\sigma = 0.40$ ,  $r = 0.05$ , et  $K = 130$



# Chapitre 9

## Le modèle de Ho et Lee

Cette leçon est une modeste excursion dans un vaste et important chapitre de la finance mathématique qui concerne les taux d'intérêts et l'évaluation des produits dérivés sur ces taux. Il est beaucoup plus difficile de modéliser la dynamique des taux d'intérêt que de modéliser celle des actions, comme nous allons le voir, et pourtant c'est absolument nécessaire car il n'est pas généralement pas raisonnable de supposer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que le taux d'intérêt  $r$  est une constante et que sa prise en compte dans les calculs de prix d'actifs financiers peut se réduire à la prise en compte d'un actif déterministe  $B_t = B_0 e^{rt}$  représentant la dynamique de  $B_0$  Euros placés au taux constant  $r$ .

Lorsqu'on parle d'intérêts, il s'agit le plus souvent de la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un prêteur à un emprunteur. On explique que pour le prêteur, l'intérêt est le prix de la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le coût correspondant à une consommation anticipée.

Au fil du temps les intérêts, accusés d'appauvrir les uns au profit d'autres ont fait souvent l'objet d'interdiction ou de limitations. Ils sont perçus de façon bien différente selon les cultures et selon les religions. Ainsi la Bible (dans l'ancien testament) et le Coran contiennent des versets qui condamnent fermement la pratique du prêt à intérêts. Les choses ont été codifiées dans la religion juive par l'interdiction de demander des intérêts à ses coreligionnaires, mais pas à des "étrangers". Cette même règle a été aussi longtemps en vigueur dans la religion catholique. Les protestants ont contribué à la levée progressive de son interdiction dans les pays européens, restée en vigueur jusqu'en 1830. Pour l'islam, l'interdit subsiste et le développement récent de banques islamiques fonctionnant sur des principes différents en est une conséquence importante. Quoiqu'il en soit la question de l'intérêt reste un sujet sensible qui est encore souvent perçu différemment selon les origines culturelles des intervenants.

### 9.1 Actifs à flux déterministes

A coté des actions et de leur produits dérivés, il existe sur les marchés à la disposition des investisseurs une autre grande famille d'actifs financiers liés au taux d'intérêt dont les plus simples sont les *obligations*. Les obligations sont des contrats qui assurent à leur détenteur à la signature du contrat un flux connu de revenus composé du *principal* versé à terme et d'une succession de *coupons* versés à des dates intermédiaires. Par exemple une obligation d'état qui rapporte 1000 Euros dans 5 ans et 3% (soit 30 Euros) tous les 6 mois pourrait s'évaluer, si le taux d'intérêt annuel  $r$  était constant sur la période, comme

$$\frac{30}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{30}{(1+r)} + \frac{30}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{30}{(1+r)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1000}{(1+r)^5}$$

et de façon plus générale, une obligation de principal  $P$ , d'échéance  $T_{\max}$  et versant aux dates  $t_i$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_k = T_{\max}$ , les coupons  $c_i$  aurait comme valeur à l'instant  $t = 0$  :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}}. \quad (9.1)$$

Mais cette formule n'est pas adaptée, non seulement parce que le taux  $r$  ne peut pas être considéré comme constant mais aussi parce qu'ici on fait implicitement l'hypothèse que les taux sont (quasiment) proportionnels à la durée du prêt ou de l'emprunt : en effet, si par exemple  $t = 2t'$ , comme  $\frac{1}{(1+r)^t} = e^{-t \ln(1+r)} \simeq e^{-tr}$ , on a donc  $\frac{1}{(1+r)^{t'}} \simeq \frac{1}{(1+2r)^t}$ . Or s'il est effectivement naturel de postuler qu'il y a une

relation entre le taux pratiqué et la durée du contrat, une simple proportionnalité est cependant, dans la réalité, une hypothèse bien trop simplificatrice.

En pratique, l'évaluation va se faire en utilisant un taux variable déterminé à partir des prix observés à travers la notion de zéro-coupons, que nous définissons à présent.

**Définition :** Un *zero-coupon* de maturité  $T$  est un titre qui rapporte 1 Euro à une date future  $T$  fixée. Sa valeur à tout instant  $t \in [0, T]$  (la durée restante étant  $\theta := T - t$ ) se note  $Z(t, T)$ , ou encore  $Z_t^T$  et on a donc toujours  $Z(T, T) = 1$ .

Le zéro-coupon est un actif *théorique* que l'on introduit notamment comme référence pour calculer le prix des obligations. En effet, toute obligation de principal  $P$ , d'échéance  $T$  et versant aux dates  $t_i$  les coupons  $c_i$  peut s'écrire comme une simple combinaison linéaire de zéro-coupons  $\sum_{i=1}^{k-1} c_i Z(t, t_i) + PZ(t, T_{\max})$  (pour tout  $t < t_1$ ). En outre le zéro-coupon est aussi l'actif que nous allons modéliser dans le modèle de Ho et Lee présenté ci-dessous.

Comme les zéro-coupons ne sont pas des actifs effectivement disponibles sur le marché, les praticiens sont conduits à reconstituer, à chaque date  $t$ , les valeurs  $Z(t, T)$  pour toutes les valeurs  $t < T < T_{\max}$  à partir des prix observés à cette date  $t$  des obligations disponibles sur le marché. Dans un marché liquide où l'on dispose des prix d'un nombre suffisant d'obligations dont les dates de versements sont identiques (ou compatibles), c'est simplement un problème de résolution d'un système linéaire. S'il y a trop peu de prix observés, on utilise ceux dont on dispose et on complète la fonction  $T \rightarrow Z(t, T)$  par diverses méthodes d'interpolation. Notons cependant que si, à toute date  $t$ , les valeurs des zéro-coupons  $Z(t, T)$  peuvent en principe être calculées à partir des prix observés à cette date, et donc sont considérées comme connues à cette date, les valeurs  $Z(t + \delta t, T)$  des zéro-coupons à la date suivante  $t + \delta t$  et de façon générale les valeurs des zéro-coupons à une date future quelconque, sont parfaitement inconnues. Or ces valeurs peuvent varier considérablement. D'où l'utilité, mais aussi la difficulté d'une modélisation stochastique.

**Remarque :** En général, ce ne sont pas les prix (en Euros) des obligations qui sont relevés mais leur *taux actuariel*. Le taux actuariel est le taux (supposé constant) qu'il faudrait utiliser dans la formule (9.1) pour obtenir le prix observé noté  $P_0$ . En d'autres termes, le taux actuariel d'une obligation est défini implicitement par

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}} = P_0$$

où  $P_0$  est le prix de marché. Il est utile de remarquer, pour avoir une bonne intuition, que le taux actuariel d'une obligation augmente lorsque son prix diminue et qu'il diminue lorsque son prix augmente. A noter aussi que le taux actuariel est le seul moyen de comparer les prix de deux obligations qui n'ont pas la même structure (pas les mêmes montants de coupons et de principal et/ou pas les mêmes dates de versements).

**Remarque :** On peut en fait s'interroger pour savoir pourquoi un actif (comme une obligation) dont le flux de revenus est parfaitement connu (puisqu'on connaît à l'avance le montants des coupons, du principal et les dates de versement), est à regarder comme stochastique. En réalité il est facile de voir que si le taux actuariel d'une obligation d'état est  $r_0$  et si l'on veut revendre cette obligation ultérieurement à une date où le même état émet une nouvelle obligation à un taux  $r_1 > r_0$ , personne n'achètera cette obligation au taux  $r_0$  car le prix de la nouvelle obligation sera inférieur. Ceci explique que le détenteur d'une obligation fait face à un risque dès que le taux peut varier.

## 9.2 Taux aléatoires

### 9.2.1 Where are the risks ?

Modern mathematical approach to interests is related to risks. One reason for the existence of different interest rates, it is because the risks can be different, and mathematical finance of interest-rates is related to no-arbitrage in this matter of risk : if there is an opportunity somewhere to take less risks for the same amount of interests, it will disappear immediately, as somebody will take advantage of it.

The main risk with loans lays in the "default risk" which means that the beneficiary of the loan can not pay back in due time what was decided. We will not consider here this question and will only consider the risks related to interests for sovereign debts, such as Treasury bonds of some reliable state. This could be for example buying, at  $t_0 = 0$ , for 950 some bond with *face value* of 1000 to be paid *at maturity*  $T =$  one year, that is an interest of 50 for 950 ; as time moves and the maturity becomes closer, this bond will



exchange at an increasing price, say 975 at some  $t_1 < T$ . Assume that at this date the same institution releases bonds with same face value of 1000 and same maturity  $T$ , for 974. Immediately nobody would buy the previous bond for 975, but only for 974. This would mean that the interests would increase from 25 for 975 to 26 for 974 (for a time-to-maturity of  $T - t_1$ ) and explains how the value of a bond faces a risk, as the releasing institution has the full right to sell for less (or more) future money. This also shows why an upward change of interest-rates results in an immediate downward change of bond values.

The same institution may release at time 0 a bond with face value 1000 with maturity  $2T$ , at a price that does not need to correspond to the same compound interest-rate, as the two bonds do not correspond to real money at the same date (one is 1000 at  $T$  and the second is 1000 at  $2T$ ; you would buy one or the other according to when you need to get 1000 or on what your anticipations are on what the interest-rates will be at time  $T$  for the maturity  $2T$ ).

This is how interest-rates depend on time  $t$  and maturity  $T$ . If  $t = 0$  (always considered to be the present time) these interest-rates are known, as a function of  $T$ . As soon as  $t > 0$ , they are not, as the sovereign releasing institution may change its interests rates in the interval, and it is common sense to introduce stochastic process to models. Observe that for each  $t$ , one does not have just one number but a complete function of the maturity  $T$  called term-structure at time  $t$ , for  $t < T$ .

### 9.2.2 Courbes de taux et structure par terme

À côté du zéro-coupon  $Z(t, T)$ , que nous avons défini comme le prix en  $t$  d'un Euro délivré en  $T$ , il y a d'autres façons de représenter les taux d'intérêt que nous allons détailler ici. On utilise par exemple le *taux zéro-coupons*, plus souvent appelé le *rendement à maturité* (Yield to maturity), qui est la fonction  $(t, T) \mapsto Y(t, T)$  définie par  $Z(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)}$ . Si l'on applique la formule (9.1) pour exprimer le prix d'un zéro-coupon  $Z(t, T)$ , on obtient  $Z(t, T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} = e^{-(T-t)\ln(1+r)}$ , ce qui est peu différent de  $e^{-r(T-t)}$ . Ceci permet de comprendre que le taux zéro-coupons  $Y(t, T)$  peut être compris comme un équivalent stochastique du taux actuariel.

**Définition :** Pour chaque valeur de  $t$ , le graphe de la fonction  $T \rightarrow Y(t, T)$  s'appelle la *courbe de taux* à l'instant  $t$ . Elle donne à un instant  $t$  fixé l'ensemble des taux pratiqués à cet instant pour des prêts de maturité  $\delta t, 2\delta t, \dots$  en fonction de cette maturité. L'ensemble des courbes de taux pour les différentes valeurs de  $t$  s'appelle la *structure par terme* des taux.

La connaissance de la courbe des taux  $T \rightarrow Y(t, T)$  (qui est équivalente à la connaissance des prix des zéros coupons) est importante puisqu'elle permet d'exprimer le prix de n'importe quelle obligation. Comme nous l'avons souligné, les valeurs à l'instant initial  $t = 0$  peuvent être déduites des prix observés sur le marché. Pour  $t > 0$  par contre, elle est inconnue et peut être considérée comme une *courbe aléatoire* (v.a. à valeurs dans un ensemble de fonctions). On comprend que pour modéliser les taux, il faut modéliser la dynamique de ces courbes de taux et non seulement la dynamique d'un prix comme dans le modèle Cos-Ross-Rubinstein, ce qui explique que ce soit plus complexe.

Une autre quantité, le *taux forward instantané*, noté  $f(t, T)$  remplace aussi parfois  $Z(t, T)$  ou  $Y(t, T)$ . Ce taux est défini implicitement à partir des zéro-coupons par la formule

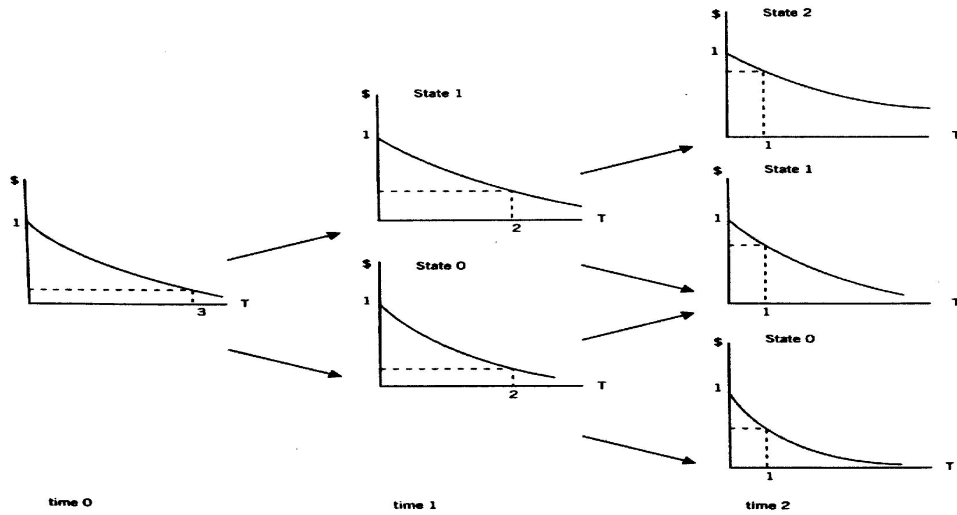
$$Z(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}.$$

Une dernière quantité, importante, est le *taux court* ou *taux instantané*,  $r_t$ . C'est le taux que les professionnels utilisent pour les règlements de dettes ou d'avoirs entre eux d'un jour sur l'autre (taux à *un jour* ou *jj*). Cette quantité aléatoire représente le coût de l'argent d'un jour sur l'autre. On supposera que  $r_t$  désigne le taux d'actualisation entre les dates  $t - \delta t$  et  $t$ , et donc  $r_t = Z(t - \delta t, t)$  et  $r_t \in \mathcal{F}_{t-\delta t}$ . Si l'on connaît les prix des zéro-coupons, on peut donc en déduire les valeurs de  $r_t$ . L'inverse n'est cependant pas vrai.

Du point de vue mathématique, c'est  $r_t$  que l'on utilise dans les modèles financiers où le taux d'intérêt sont supposés stochastiques, pour calculer l'actualisation. Ainsi, si  $X_t$  est le prix en  $t$  d'un actif, et  $\tilde{X}_t$  son prix actualisé en  $t = 0$ , on aura  $\tilde{X}_t = X_t/B_t$  où  $B_t = (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t)$ . L'actualisation peut donc aussi s'écrire en fonction des zéro-coupons :

$$\frac{1}{B_t} = \frac{1}{1 + r_{\delta t}} \frac{1}{1 + r_{2\delta t}} \dots \frac{1}{1 + r_t} = Z(0, \delta t)Z(\delta t, 2\delta t) \dots Z(t - \delta t, t).$$

On peut voir  $B_t$  comme la valeur aléatoire d'une compte d'épargne ayant un dépôt initial de 1 Euros et rapportant des intérêts sur la base du taux cours observé au jour le jour.



### 9.3 Le modèle de Ho et Lee pour les zéro-coupons

On veut maintenant introduire l'équivalent, pour les taux d'intérêt, du modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour les actions, c'est-à-dire un modèle binomial. Comme il s'agit cette fois d'un modèle de taux, sa particularité est que les valeurs de la marche aléatoire ne sont plus des *nombres* mais des *courbes*

$$T \mapsto Z_t^T = Z(t, T) \quad , \quad t \leq T \leq T_{\max} \quad , \quad t \in \mathbb{T} := [0..T_{\max}]_{\delta t} \quad , \quad \delta t := T_{\max}/n.$$

L'idée de ce modèle est de généraliser au cas stochastique la relation  $Z(s, t)Z(t, u) = Z(s, u)$  pour tout  $s \leq t \leq u$ , appelée *relation de rollover*. Dans le cas de taux d'intérêt déterministes, il est en effet facile de se convaincre que cette relation doit être satisfaite puisque le terme de gauche est précisément égal à la quantité à investir à l'instant  $s$  pour avoir en  $t$  le montant précis qu'il faut investir à cet instant pour avoir un Euro à l'instant  $u$ . Mais ceci est aussi la quantité égale au terme de droite. Lorsqu'on réécrit cette relation sous la forme,  $Z(t, u) = \frac{Z(s, u)}{Z(s, t)}$ , on remarque que les valeurs de  $Z(s, t)$  et  $Z(s, u)$  étant connues à l'instant  $s$ , la relation permet de prévoir à l'instant  $s$  la valeur de  $Z(t, u)$  qui, elle, est inconnue à cette date. Pour leur modèle stochastique Ho et Lee ont eu l'idée de transformer cette égalité en une récurrence stochastique

$$Z(t, u) = \frac{Z(s, u)}{Z(s, t)} \eta(s, t, u). \quad (9.2)$$

où  $\eta = \eta(s, t, u)$  est aléatoire. Plus précisément, on se donne une fonction déterministe  $(\theta, x) \mapsto \eta(\theta, x)$  (que l'on précisera plus loin) telle que

$$Z_{t+\delta t}^T = \frac{Z_t^T}{Z_{t+\delta t}^{t+\delta t}} \eta(\theta_{t+\delta t}^T, X_{t+\delta t}), \quad (9.3)$$

où  $\theta_s^T := T - s$  est le temps qui reste en  $t = s$  jusqu'à la maturité  $t = T$ . L'idée de ce modèle est illustrée par la figure suivante tirée de l'article original de Ho et Lee.

Comme dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein,  $Z_{i\delta t}$  prend  $i + 1$  valeurs, selon le nombre de "up",  $j = J_i(\omega)$ , où  $J_i = \delta J_1 + \dots + \delta J_i$ ,  $(\delta J_i)_{i \geq 1}$  étant des v.a. de Bernoulli indépendantes et de loi  $^1 \delta J_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1 - \pi_i, 1)$ . On définit la filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , par  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , et pour  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_{k\delta t} = \sigma(\delta J_1, \dots, \delta J_k) = \sigma(X_{\delta t}, \dots, X_{k\delta t})$ , avec  $X_{i\delta t} = \delta J_i$ . Les fonctions aléatoires  $Z_t : [t..T_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $T \mapsto Z_t^T$ , sont choisies  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, et même  $\sigma(J_i)$ -mesurables pour  $t = i\delta t$ .

Nous allons montrer à présent que pour ce modèle la fonction  $\eta$  doit nécessairement prendre une forme particulière assez simple et donc que ce modèle ne dépend en fait que de 3 paramètres.

<sup>1</sup>Il est d'usage de choisir  $\pi_i = \mathbb{P}(\{\delta J_i = 0\})$  et donc  $1 - \pi_i = \mathbb{P}(\{\delta J_i = 1\})$ , sans doute car un "up" sur les taux correspond à un "down" sur les obligations.

### 9.3.1 Un model à trois paramètres : $\pi$ , $\delta$ , et $n$

#### Condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

La première contrainte concerne l'absence d'opportunité d'arbitrage : pour tout  $T \in \mathbb{T}$ , la valeur actualisée de  $Z_t^T$  doit être une martingale. Pour cela on doit avoir pour tout  $t \in [0..T - \delta t]$

$$Z_t^T = \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t).$$

En utilisant (9.3), il vient

$$\begin{aligned} Z_t^T &= \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(Z_t^T \eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) = Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t})). \end{aligned}$$

puisque  $X_{t+\delta t}$  est indépendant of  $\mathcal{F}_t$ . Donc, en divisant par  $Z_t^T$  on obtient,

$$1 = \pi_i \eta(\theta, 0) + (1 - \pi_i) \eta(\theta, 1). \quad (9.4)$$

pour tout  $\theta = \theta_{t+\delta t}^T \in [\delta t..T_{\max}]_{\delta t}$  Il en résulte que  $\pi_i = (1 - \eta(\theta, 1)) / (\eta(\theta, 0) - \eta(\theta, 1))$  ne peut changer avec  $i$  et doit être constant (égal à  $\pi$ ). De plus, en utilisant (9.3) pour  $t' := T - \delta t$ , on a aussi  $\theta_{t'+\delta t}^T = \theta_T^T = 0$ , et

$$1 = Z_T^T = Z_{t'+\delta t}^T = \frac{Z_{t'}^T}{Z_{t'+\delta t}^T} \eta(\theta_{t'+\delta t}^T, X_{t'+\delta t}) = \frac{Z_{T-\delta t}^T}{Z_{T-\delta t}^T} \eta(\theta_T^T, X_T)$$

pour  $X_T \in \{0, 1\}$ . Donc  $\eta(0, x) = 1$  pour tout  $x \in \{0, 1\}$ . D'où la proposition suivante :

**Proposition 9.1** *Tout model de taux d'intérêt satisfaisant (9.3), avec les  $X_{t_i} \sim \mathcal{B}(\pi_i, 1)$  indépendents, est sans arbitrage si et seulement si  $\eta(0, x) = 1$  pour tout  $x \in \{0, 1\}$ , et si les  $\pi_i$  sont égaux et que leur valeur commune  $\pi$  satisfait la relation*

$$1 = \pi \eta(\theta, 0) + (1 - \pi) \eta(\theta, 1). \quad (9.5)$$

#### Condition binomiale

A présent, en utilisant le fait que pour  $t = i\delta t$ ,  $Z_t^T$  ne dépend que de  $J_i$ , on a le résultat suivant qui fixe la forme de la fonction  $\eta$  :

**Proposition 9.2** *Sous la condition de non arbitrage, pour tout  $\theta \in [0..T - \delta t]_{\delta t}$ , on a :*

$$\eta(\theta + \delta t, 1) \eta(\theta, 0) \eta(\delta t, 0) = \eta(\theta + \delta t, 0) \eta(\theta, 1) \eta(\delta t, 1), \quad (9.6)$$

et donc

$$\eta(\theta, 0) = \frac{1}{\pi + (1 - \pi) \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}}, \quad \eta(\theta, 1) = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}} \eta(\theta, 0), \quad \text{avec } \delta := \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)} > 1. \quad (9.7)$$

**Preuve :** Cette formule est une conséquence du fait que le modèle doit être binomial, c'est-à-dire que, pour  $t = i\delta t$ ,  $Z_t^T$  ne doit dépendre que de  $j = J_i(\omega)$  et non des valeurs particulières de  $\delta J_1(\omega)$ ,  $\dots$ ,  $\delta J_i(\omega)$  dont la somme vaut  $J_i(\omega)$ . Ceci n'est vrai que si l'arbre est *recombinant*, c'est-à-dire si un *up* suivi d'un *down* donne le même résultat qu'un *down* suivi d'un *up*. En d'autres termes, pour  $\omega' \in \Omega$  et  $\omega'' \in \Omega$  tels que  $J_i(\omega') = J_i(\omega'') = j$  et  $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'') = j + 1$ , mais  $\delta J_{i+1}(\omega') = 1$  et  $\delta J_{i+2}(\omega') = 0$  tandis que  $\delta J_{i+1}(\omega'') = 0$  et  $\delta J_{i+2}(\omega'') = 1$ , les valeurs de  $Z_{i\delta t}^T$  et de  $Z_{(i+2)\delta t}^T$  ne doivent pas dépendre du fait que  $\omega = \omega'$  ou  $\omega = \omega''$ .

Posons  $\theta = \theta_{t+2\delta t}^T$  et appliquons deux fois (9.3) :

$$\begin{aligned} Z_{t+2\delta t}^T &= \frac{Z_{t+\delta t}^T}{Z_{t+\delta t}^T} \eta(\theta, X_{t+2\delta t}) = \frac{Z_t^T}{Z_t^T Z_{t+\delta t}^T} \eta(\theta, X_{t+\delta t}) \eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \\ &= \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+2\delta t} \eta(\delta t, X_{t+\delta t})} \eta(\theta, X_{t+\delta t}) \eta(\theta, X_{t+2\delta t}), \quad \text{toujours par (9.3)} \end{aligned}$$

Donc comme  $J_i(\omega') = J_i(\omega'')$  et  $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'')$ , et comme  $Z_{t+2\delta t}^T$ ,  $Z_t^T$ , et  $Z_t^{t+2\delta t}$  ne dépendent pas du fait que  $\omega = \omega'$  ou que  $\omega = \omega''$ , il en sera de même de

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, X_{t+\delta t}) \eta(\theta, X_{t+2\delta t})}{\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}.$$

L'égalité des deux valeurs obtenues selon que  $\omega = \omega'$  ou  $\omega = \omega''$ , donne

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, 1)\eta(\theta, 0)}{\eta(\delta t, 1)} = \frac{\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

À présent, comme d'après (9.5) on a  $\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta, 0))$ , donc (9.3) devient

$$\frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 0)\eta(\delta t, 0)) = \frac{1}{(1-\pi)^2}\eta(\theta + \delta t, 0)(1 - \pi\eta(\theta, 0))(1 - \pi\eta(\delta t, 0)). \quad (9.8)$$

Posons  $x_n = \frac{1}{\eta(\theta, 0)}$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{\eta(\theta + \delta t, 0)}$ , et donc  $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t, 0)}$ , l'égalité (9.8) devient

$$(1 - \pi) \left(1 - \frac{\pi}{x_{n+1}}\right) \frac{1}{x_n} \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_{n+1}} \left(1 - \frac{\pi}{x_n}\right) \left(1 - \frac{\pi}{x_1}\right).$$

Soit, en multipliant les deux termes par  $x_1 x_n x_{n+1}$ , on obtient  $(1 - \pi)(x_{n+1} - \pi) = (x_n - \pi)(x_1 - \pi)$ , ou, de manière équivalente,  $x_{n+1} = \pi + \frac{1}{1-\pi}(x_n - \pi)(x_1 - \pi) =: x_n \delta + \gamma$ , avec  $\delta = \frac{x_1 - \pi}{1 - \pi}$  et  $\gamma = \pi - \frac{\pi}{1 - \pi}(x_1 - \pi) = \pi(1 - \delta)$ . Comme  $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t, 0)}$ , on obtient  $\eta(\delta t, 0) = \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta}$ . Et comme  $1 = \pi\eta(\delta t, 0) + (1 - \pi)\eta(\delta t, 1)$ ,

$$\delta = \frac{1}{1 - \pi} \left( \frac{1}{\eta(\delta t, 0)} - \pi \right) = \frac{1}{1 - \pi} \frac{1 - \pi\eta(\delta t, 0)}{\eta(\delta t, 0)} = \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

Finalement, en résolvant  $x_n = x_{n-1}\delta + \pi(1 - \delta)$  il vient  $x_n = (1 - \pi)\delta^n + \pi$ , d'où

$$\eta(\theta, 0) = \eta(n\delta t, 0) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^n} = \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{n}{\delta t}}},$$

et

$$\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1 - \pi} - \frac{\pi}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{n}{\delta t}}} = \frac{\delta^{\frac{n}{\delta t}}}{\pi - (1 - \pi)\delta^{\frac{n}{\delta t}}} = \delta^{\frac{n}{\delta t}} \eta(\theta, 0).$$

□

Résumons en un théorème le point où nous sommes parvenus :

**Théorème 9.3** *Pour tout  $\pi \in ]0, 1[$  et tout  $\delta > 1$  la famille de processus  $(Z_t^T)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$  définie pour  $T \in ]0..T_{max}]$  par  $Z_0^T$  déterministe quelconque puis par récurrence par (9.3) et (9.7) où les v.a.  $(X_t)_{t \in [0..T_{max}]}$  sont des v.a. de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, 1 - \pi)$  indépendantes est un modèle sans arbitrage de marché de zéros-coupons.*

**Preuve :** La proposition 5.1 montre que le calcul menant à (9.4) prouve que  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in [0..T]_{\delta t}} := \left(\frac{Z_t^T}{B_t}\right)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$ , avec  $B_t = 1/Z(0, \delta t)Z(\delta t, 2\delta t) \dots Z(t - \delta t, t) = 1/Z_0^{\delta t} Z_{\delta t}^{2\delta t} \dots Z_{t-\delta t}^t$  est une martingale pour tout  $T$ . On conclut par le théorème 5.4. □

## 9.4 Exemples de produits dérivés de taux

Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal  $K$ . Typiquement, si  $r_T$  est l'intérêt payable à la date  $T$  pour l'emprunt d'un euro à la date  $T - \delta t$ , ce contrat payera  $(r_T - K)^+$ . Ce contrat s'appelle un *caplet* à l'échéance  $T$  au plafond  $K$ . Il donne une assurance contre une envolée du taux (taux plafond) à l'instant  $T$ . Pour le prêt d'un Euro remboursable à la date  $T_{max}$  et à intérêts payables à intervalle  $\delta t =$  un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance  $T \in ]0..T_{max}]_{\delta t}$ . Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date  $t - \delta t$ , par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en  $Z_{t-\delta t}^t$  et en placement (risqué) en  $Z_{t-\delta t}^{t+\delta t}$ . Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in [0..T]}$  sont, pour tout  $T \in \mathbb{T}$ , des  $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$ -martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\text{Caplet}_{t-\delta t}^T = \mathbb{E}^*(\text{Caplet}_t^T \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) / (1 + r_t) \quad (9.9)$$

(et plus généralement, pour tous  $s \leq t$ ,  $\text{Caplet}_s^T = \mathbb{E}^* \left( \text{Caplet}_t^T \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s \right)$ ).

A coté des Caps composés de caplets, il existe de même des Floors composés de floorlets, qui protègent d'une dégringolade du taux (taux plancher), dont le prix se calcule de manière analogue puisqu'il s'agit alors d'un Put (ou d'une famille de Puts). Enfin il existe également un grand nombre d'autres contrats dérivés de taux, comme les Collars (achat d'un Cap et vente simultanée d'un Floor de même caractéristiques), Swaps (échange d'un taux variable contre un taux fixe), Swaptions (option sur Swap) ou FRA (Forward Rate Agreement)...

**Remarque :** Le modèle de Ho et Lee étudié ici est un modèle discret. Les versions continues correspondantes appartiennent à la famille des modèles HJM (pour Heath, Jarrow et Morton) et sont des modèles du taux forward instantané  $f(t, T)$  et non du zéro-coupons  $Z(t, T)$ . Il existe aussi plusieurs modèles continus pour le taux court  $r_t$  (dont un dû à Ho et Lee, à ne pas confondre...) mais ces modèles ne permettent pas de représenter l'ensemble de la dynamique de la structure par terme.

**Remarque :** Notons pour finir que le modèle de Ho et Lee, comme c'est le cas généralement des modèles dit *modèles de taux*, ne prend en compte que le risque dit *risque de taux* correspondant aux variations du taux dues à l'inflation et autres aléa économiques mais pas le risque dit *risque de crédit* ou *de défaut* qui correspond au niveau plus ou moins bon de confiance du détenteur de l'obligation ou du prêt dans la qualité de l'emprunteur quant à un possible défaut (de remboursement). C'est la raison pour laquelle une obligation d'état (en Europe) est généralement moins chère qu'une obligation souscrite auprès d'une entreprise de même caractéristiques. Le risque de crédit est habituellement séparé dans la modélisation du risque de taux et il existe des produits spécifiques dit *produits dérivés de crédit* qui servent à couvrir ce second risque. Le modèle de Ho et Lee ne prend pas du tout en compte le risque de crédit.



# Annexe A

## Exercices

### A.1 Les trajectoires d'un modèle à $n$ étapes

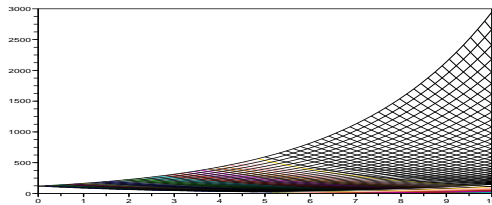
L'objet de cet exercice est de calculer et dessiner un modèle à  $n$  étapes généralisant les modèles à une et deux étapes vues en cours. Du point de vue de l'interprétation financière, il est important de comprendre que le dernier instant (d'indice  $n$ ) et l'instant initial sont fixés, respectivement à  $T$  et  $0$ , et que les  $n$  étapes correspondent à une discrétisation  $[0..T]_{\delta t}$ ,  $0 < t_0 < \dots < t_i < t_n = T$  que nous supposons régulière, avec pas de temps constant  $\delta t = \text{delta\_t} = T/n$ . Nous fixerons  $n$  mais veillerons à ce que sa valeur puisse être changée facilement d'une exécution à l'autre de la feuille de calcul.

Pour des raisons de réalisme du modèle qui apparaîtront peu à peu il est important que les facteurs  $\text{up} < 1 < \text{down}$  dépendent de  $n$  astucieusement choisie; le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) – qui sera étudié plus longuement dans les cours suivants – consiste à poser  $\text{up} = \exp(\text{sigma} * \text{sqrt}(\text{delta\_t})) = e^{+\sigma\sqrt{\delta t}}$  et  $\text{down} = 1/\text{up} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ . Nous choisirons pour commencer  $n=16$ ;  $T=1$ ;  $S_0 = S_0 = 140$ ;  $\sigma = \text{sigma} = 0.40$ . On notera  $\text{delta\_t} = T/n$ . Les valeurs possibles des  $S_{t_i}$  sont celles d'une marche aléatoire partant de  $S_0$ , avec  $S_{t_i} = S_{t_{i-1}} U_i$ , avec  $U_i \in \{\text{up}, \text{down}\}$ , et donc  $S_{t_i} = S_0 \text{up}^{J_i} \text{down}^{i-J_i}$ , où les  $J_i$  forment une marche de Bernoulli

$$J_0 = 0 \quad ; \quad J_i = J_{i-1} + \delta J_i \quad ; \quad \delta J_i \in \{0, 1\}.$$

Nous noterons  $j = J_i(\omega) \in \{0, \dots, i\}$  et  $S(i, j) = S_0 \text{up}^j \text{down}^{i-j}$ . Nous tabulerons les valeurs possibles de  $S(i, j)$  dans une matrice  $\text{SS}(1 : n+1, 1 : n+1) := S(i, j)$ .

1. Ouvrir une feuille Scilab TP1. `sce`. Initialiser les diverses constantes évoquées. Calculer la matrice `SS`. Notez que cette matrice est triangulaire (inférieure), puisque  $j \leq i$ .
2. Tracer l'“arbre de Cox” joignant les points  $(i * \delta t, S(i, j))$  à  $((i + 1) * \delta t, S(i + 1, j + \delta J_{i+1}))$ , avec  $\delta J_{i+1} \in \{0, 1\}$  :



Arbre de Cox-Ross-Rubinstein :

#### Indications :

`xset("window", 1)` choisit (et éventuellement crée) la fenêtre 1 comme fenêtre graphique courante (qu'on peut effacer au moyen de `clf(1)`).

`plot2d(Abs, Ord)` trace les lignes polygonales (ouvertes) dont les abscisse et les ordonnées des sommets figurent dans les colonnes homologues des matrices notées ici `Abs` et `Ord`.

Voici un code qui utilise un algorithme parcourant tous les cotés de l'arbre une fois et une seule, en  $n + 1$  lignes polygonale joignant  $n + 1$  sommets, et qui se prête donc bien à la syntaxe de `plot2d`. Utilisez les commentaires du code pour comprendre l'algorithme sur le dessin, pour une petite valeur de  $n$ ,  $n=10$  par exemple.

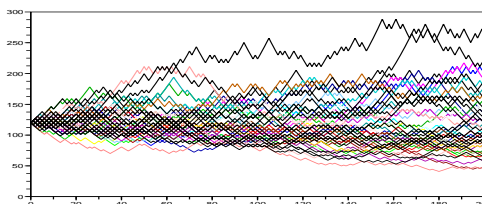
```
Abs=zeros(n+1,n+1); // le dessin comportera n+1 lignes polygonales
Ord=zeros(n+1,n+1); // ayant chacune n cotes, donc n+1 sommets
```

```

for k=0 :n // k numerote les lignes polygonales
  for l=0 :n-k // premieres moitie : depart en (t,S(t,k)) avec t=k*delta_t
    Abs(l+1,k+1)=(k+1)*delta_t; // les abscisses croissent
    Ord(l+1,k+1)=SS(k+1+1,k+1); // et les ordonnees decroissent : j=k=Cste
  end; // on arrive en (T,S(T,k)) avec T=n*delta_t
  for l=1 :k // on repart de ce point
    Abs(n-k+l+1,k+1)=(n-l)*delta_t; // avec les abscisses qui diminuent
    Ord(n-k+l+1,k+1)=SS(n-l+1,k-1+1); // et les ordonnees aussi
  end; // la lignes n°k abouti en (t,S(t,0)) avec t=(n-k)*delta_t
end;
xs2eps(1,'ArbreCox.eps') et xs2gif(1,ArbreCox.gif) permettent de sauvegarder votre figure
dans la norme eps et gif respectivement.

```

3. Pour  $n=200$  calculer puis représenter  $M=40$  trajectoires aléatoires<sup>1</sup> du processus de CRR.



Des trajectoires tirées aléatoirement :

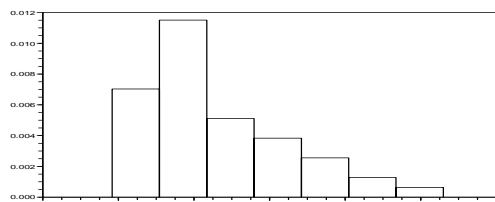
#### Indications :

`rand(n,M,'uniform')` retourne une matrice  $n \times M$  de nombres aléatoires uniformément distribués sur  $[0, 1]$ .

Que vaut `deltaJ=int(p+rand(n,M))` ,si  $p \in ]0, 1[$  est une valeur donnée ?

Et `J=cumsum(deltaJ,"r")` ?

4. A l'aide de l'instruction `histplot` représenter un histogramme des valeurs finales de vos trajectoires aléatoires; on pourra par exemple prendre `int(sqrt(M))` pour nombre de classes. Recommencer avec  $M=400$ .



Histogramme des valeurs finales obtenues :

## A.2 Les trajectoires du call d'un modèle à $n$ étapes

L'objet de cet exercice est de calculer et dessiner les valeurs d'une option Call d'un modèle à  $n$  étapes généralisant les modèles à une et deux étapes vues en cours.

On reprend toutes les notations du TP1; de ce point de vue, il peut être plus simple, pour la feuille TP2.SCE de script, de partir de la feuille TP1.SCE, on supprimant les passages sans objet ici.

Nous choisirons toujours, pour commencer  $n=16$ ;  $T=1$ ;  $S_0 = S_0=140$ ;  $\sigma = \text{sigma}=0.40$ .

Nous tabulerons les valeurs possibles  $C(i, j)$  d'une option Call de prix d'exercice  $K = S_0$  (option "à la monnaie"), lorsque l'action vaut  $S(i, j)$ , dans une matrice `CC(1 :n+1, 1 :n+1):=S(i, j)`.

1. Définir la fonction `phi(S)` retournant la valeur  $(S - K)^+$  d'un Call à la date d'exercice  $T$  et de prix d'exercice  $K$ .
2. Calculer la matrice (triangulaire) `CC`.

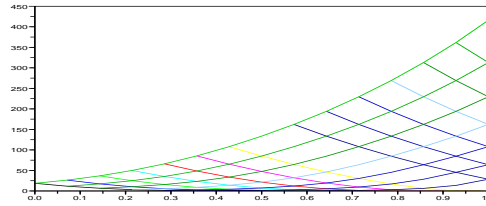
**Indication :** la *probabilité risque-neutre* est caractérisée par  $p := \mathbb{P}^*(\{\delta J_{i+1} = 1\}) = \frac{R-d}{u-d}$ , avec  $R = e^{r\delta t}$ ,  $u = \text{up}$ , et  $d = \text{down}$ . Prendre  $r = 0.05$ .

3. Que vaut la Call à la monnaie à la date  $t = 0$  ?

<sup>1</sup>Pour  $p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 1\})$  et donc  $1 - p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 0\})$ , on choisit pour le moment  $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ .



4. Tracer l'arbre joignant les points  $(i*\delta t, C(i, j))$  à  $((i+1)*\delta t, C(i+1, j + \delta J_{i+1}))$ , avec  $\delta J_{i+1} \in \{0, 1\}$  :



Arbre du Call :

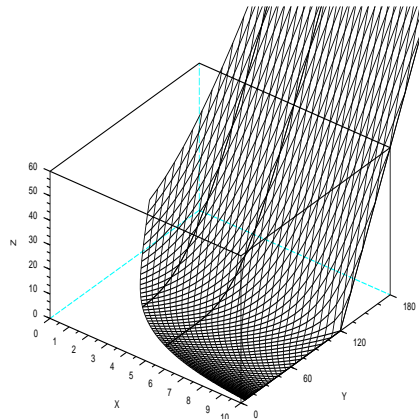
**Indications :**

`plot2d(Abs,Cot)` trace les lignes polygonales (ouvertes) dont les abscisse et les ordonnées des sommets figurent dans les colonnes homologues des matrices notées ici `Abs` et `Cot`. Il suffit de remplacer la matrice `Ord` du TP1 qui comportait des valeurs de `SS`, par une matrice analogue `Cot` comportant les valeurs correspondantes de `CC`.

`xs2eps(1, 'ArbreCoxCall.eps')` et `xs2gif(1, ArbreCoxCall.gif)` permettent de sauvegarder votre figure dans la norme `eps` et `gif` respectivement.

5. Pour  $n=200$  calculer puis représenter  $M=40$  trajectoires aléatoires<sup>2</sup> du processus de prix du Call dans ce modèle de CRR.  
 6. On revient à  $n=15$ . Tracer, au moyen de la fonction `param3d1`, le "filet du Call".

**Indication :** utiliser `param3d1(Abs,Ord,Cot,alpha=50,theta=-89,flag=[2,4])` puis, en cliquant sur GED, sélectionnez `Axes`, choisissez l'onglet `Aspect`, et cochez la case `Cube Scaling On`. Pour améliorer la lisibilité du dessin, représenter, au niveau  $t = T$  (et donc  $i=n$ ) le graphe de `phi(SS(n+1, :))`, c'est-à-dire de la fonction de payoff. Pour cela former les vecteurs (colonnes) `AbsLignePayOff`, `OrdLignePayOff`, `CotLignePayOff`.



Filet du Call :

7. Recommencer le tracé avec  $n = 150$ ; qu'observez-vous? Savez-vous comment demander à Scilab de ne tracer que les segments contenus dans la boîte `[0..T, 0..3*S0, 0..2*S0]` ?

### A.3 Calcul de prix par espérance conditionnelle

Vous avez vu en cours qu'à tout moment  $i\delta t = t \leq T$ , lorsque le sous-jacent  $S_t$  vaut  $s$ , le prix  $C_t$  d'une option européenne de payoff  $\varphi(S_T)$  (options *vanilles*) est donné par

$$C_t = C(t, S_t) , \text{ avec } C(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(\varphi(S_T) \mid \{S_t = s\}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(\varphi(su^L d^{n-i-L})), \quad (A.1)$$

où  $L \rightsquigarrow \mathcal{B}(n - i, p)$ , avec  $u = \text{up}$  ;  $d = \text{down}$  ;  $p = \frac{R-d}{u-d}$  et  $R = e^{r\delta t}$ .

L'objet de cet exercice est d'utiliser ce résultat pour obtenir diverses illustrations relatives aux options vanilles.

On reprend toutes les notations du TP1; nous choisissons toujours, pour commencer  $n=16$  ;  $T=1$  ;  $K = S_0 = S_0=140$  ;  $r = r=0.05$  ;  $\sigma = \text{sigma}=0.40$  ;  $\varphi(S) = \text{phi}(S) = \max(S-K, 0) = (S - K)^+$ .

1. Exécutez la commande `plot2d(0 :50, binomial(0.4, 50))` . Devinez-vous ce que retourne la fonction Scilab `binomial(p, n)` ? A défaut, consultez l'aide en ligne...

<sup>2</sup>Pour  $p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 1\})$  et donc  $1 - p := \mathbb{P}(\{\delta J_i = 0\})$ , on choisit à présent  $p = \frac{R-d}{u-d}$ .

2. Tabuler les valeurs possibles  $C(i, j)$  d'une option Call de prix d'exercice  $K = S_0$  (option "à la monnaie"), lorsque l'action vaut  $S(i, j)$ , dans une matrice CCC(1 :n+1, 1 :n+1) des valeurs de  $C(i, j)$  en utilisant cette fois-ci la formule A.1.  
Vérifiez que vous retrouvez bien la même valeur qu'avec la méthode de la fois précédentes pour le Call à la monnaie à la date  $t = 0$ ?
3. Pour  $l=0 :n$ , tracez toutes les courbes joignant les  $(S(n-l, j), C(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$  (ou plutôt  $j=0 : \min(n-1, j_{\max})$  où  $j_{\max}=10$  si  $n=16$ ).
4. Représenter (dans une nouvelle fenêtre) le graphe du prix du Call (à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $K \in [\frac{1}{2}S_0.. \frac{3}{2}S_0]_{\delta K}$  pour  $\delta K = S_0/10$ . Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.
5. Représenter (dans une nouvelle fenêtre, par `scf(2)`) le graphe de la prime du Call (prix à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $\sigma \in [\delta\sigma..0.5]_{\delta\sigma}$  pour  $\delta\sigma = 0.01$ . Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.
6. Reprenez ces deux dernières questions pour un Put, de payoff  $\varphi(S) = (K - S)^+$ .

## A.4 Le Delta de couverture

Lors du TD 3 vous avez tabulé, dans une matrice CCC, les valeurs  $CCC(i+1, j+1) = C(i, j)$  d'une option, lorsque  $S_{i\delta t} = S(i, j) = SS(i+1, j+1)$ . et, pour  $l=0 :n$ , vous avez tracé toutes les courbes des prix, c'est-à-dire les courbes joignant les  $(S(n-l, j), C(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$  (ou plutôt  $j=0 : \min(n-1, j_{\max})$ ) Le code ci-dessous permet de faire cela selon une animation (Choisir  $n=100$ )

```
scf(1); //on se place dans la fenetre 1
jmax=int(sqrt(n)); //maximum de up faire figurer dans le cadre
rectangle=[0,0,SS(jmax,jmax),CCC(jmax,jmax)]; // [Smin,Cmin,Smax,Cmax]
driver("X11") //pas d'enregistrement des operations graphiques
xset("pixmap",1) //on passe en mode double buffer
plot2d(0,0,frameflag=5,rect=rectangle) //on fixe l'echelle
for l=n :-1 :0 //on attaque la boucle d'animation
    xset("wwpc") //effacement de la pixmap
    plot2d(SS(n+1-l,1 :n+1-l),CCC(n+1-l,1 :n+1-l),frameflag=0)
    xset("wshow") //basculement de la pixmap a l'ecran
    halt() // il faudra passer dans la fenetre scilab et appuyer une touche
end; //... et on deboucle
xset("pixmap",0) //retour a l'affichage direct a l'ecran
driver("Rec") //retour au driver par default
```

Vous avez vu en cours qu'à tout moment  $i\delta t = t \leq T$ , lorsque le sous-jacent  $S_t$  vaut  $s = S(i, j)$ , l'option  $C_t$  vaut  $C = C(i, j)$  le portefeuille de couverture doit comporter un nombre  $\Delta_t = a$  de sous-jacent, avec

$$a = \Delta_t = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \Delta(i, j) = DD(i+1, j+1),$$

avec  $C^+ = C(i+1, j+1)$ ,  $C^- = C(i+1, j)$ ,  $S^+ = S(i+1, j+1)$ , et  $S^- = S(i+1, j)$ .

On reprend toutes les notations du TP3; en particulier  $r = r=0.05$ ;  $\sigma = \text{sigma}=0.40$ ;  $\varphi(S) = \text{phi}(S) = \max(S-K, 0) = (S - K)^+$ .

1. Expérimentez le code d'animation ci-dessus
2. Tabulez les valeurs  $\Delta(i, j) = DD(i+1, j+1)$  des quantités d'actions à détenir pour couvrir l'option.
3. Pour  $l=n :-1 :0$ , tracez toutes les courbes joignant les  $(S(n-l, j), \Delta(n-l, j))$  successifs, pour  $j=0 :n-1$ , en vous inspirant du code fourni.
4. Reprenez ces deux dernières questions pour un Put, de payoff  $\varphi(S) = (K - S)^+$ .
5. S'il vous reste du temps, terminez la fiche TD3 : graphe du prix du Call (à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $K \in [\frac{1}{2}S_0.. \frac{3}{2}S_0]_{\delta K}$  pour  $\delta K = S_0/10$  (Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.) et ...
6. Représentez (dans une nouvelle fenêtre, par `scf(2)`) le graphe de la prime du Call (prix à  $t = 0$ ) comme une fonction de  $\sigma \in [\delta\sigma..0.5]_{\delta\sigma}$  pour  $\delta\sigma = 0.01$ . (Observez et commentez le sens de variation de cette fonction.)

## A.5 Options américaines

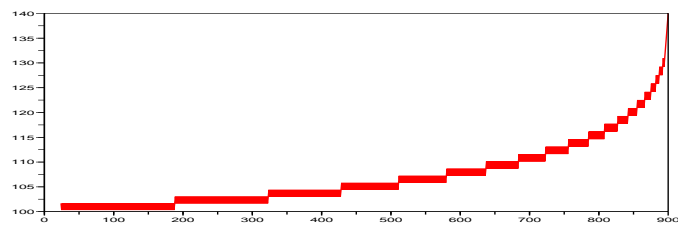
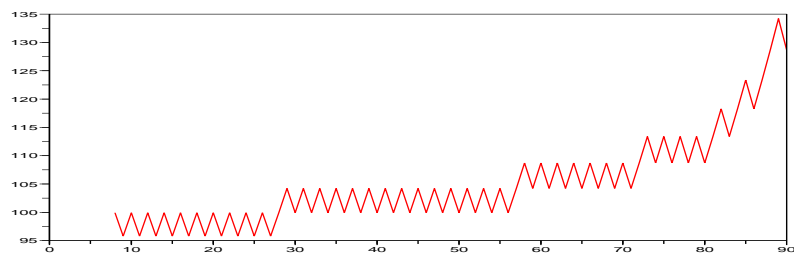
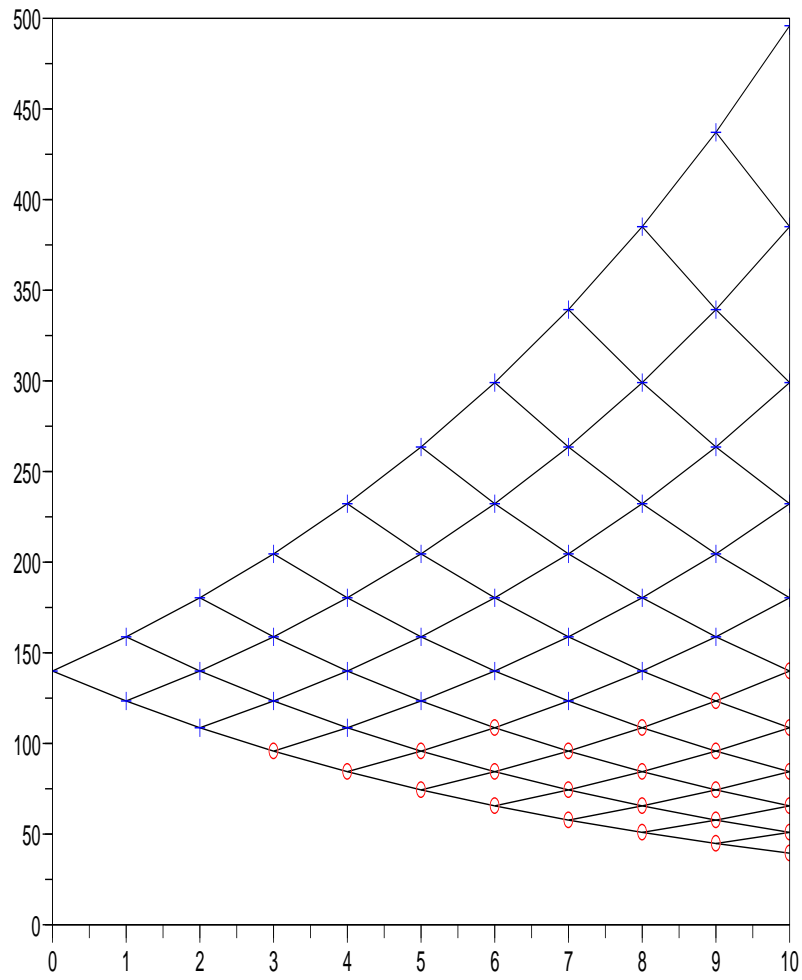
On considère un processus  $S_t$ , défini pour tout  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T\}$ ,  $T =: n\delta t$  qui représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps. On appelle option américaine de payoff  $\varphi(S_t)$  et de date d'échéance  $T$  un contrat qui peut être exercé à toute date  $t \in [0..T]_{\delta t}$  et qui rapporte  $\varphi(S_t)$  à son détenteur s'il l'exerce à l'instant  $t$ . Lorsque  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ , on parle de *call américain* et lorsque  $\varphi(S_t) = (K - S_t)^+$ , on parle de *put américain*. On désigne par  $U_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une option américaine dont le payoff, à l'instant  $t$ , est  $\varphi(S_t)$ . On désigne par  $R = e^{r\delta t}$  le taux d'escompte entre les dates  $t$  et  $t + \delta t$  (supposé connu et constant).

Une adaptation du raisonnement simple mené pour les options européennes permet de se convaincre que  $U_t$  vérifie la relation de récurrence descendante suivante :

$$\begin{cases} U_t &= \text{Max} \left( \varphi(S_t), \frac{1}{R} \mathbb{E}_t^*(U_{t+\delta t}) \right) \\ U_T &= \varphi(S_T) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbb{E}_t^*$  est l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}^*(. | \mathcal{F}_t)$  au sens de la probabilité "risque neutre".

1. Poser  $n=10$ ,  $S_0=140$ ,  $K=S_0$ ,  $\sigma=0.4$ ,  $r=0.05$ , et créer par récurrence rétrograde (sur  $i$ ) une matrice  $CC$  de taille  $(n+1) \times (n+1)$  telle que  $CC(i+1, j+1)$  soit égale à la valeur du Call (européen) lorsque  $t = i\delta t$  et  $S_t = S(i, j)$  ( $j \leq i$ ).
2. En utilisant la formule de récurrence rétrograde (A.2) dans le cas d'un call, créer de manière analogue une matrice  $CC_{\text{Amer}}$  correspondant aux valeurs d'un Call américain.
3. Comparez les valeurs à l'instant initial (=prime) d'un Call et d'un Call européen. Commentez
4. Plus généralement, comparez  $CC(i+1, j+1)$  et  $CC_{\text{Amer}}(i+1, j+1)$ . (Commentez).
5. Créer de manière analogue des matrices  $PP(i, j)$  et  $PP_{\text{Amer}}(i, j)$  correspondant aux valeurs d'un Put et d'un Put américain.
6. Comparez les valeurs des primes du Put et du PutAméricain. Commentez
7. Recommencer avec  $n=200$ . Commentaire
8. Recommencer avec  $r=0$ . Commentez
9. On revient à  $r=0.05$ . Sur l'arbre binaire représentant les valeurs de l'actif sous-jacent, représenter les noeuds en deux couleurs différentes selon que le Max de la formule de récurrence est égal à  $\varphi(S_t)$  ou à  $\frac{1}{R} \mathbb{E}_t(U_{t+\delta t})$ . On obtient ainsi deux régions séparées par la "frontière d'exercice". On pourra prendre  $N = 20$ , puis  $N = 100$ . On créera pour ce faire une matrice  $\text{ExerPA}(i, j)$  ayant la valeur 1 ou 0 selon que  $\frac{1}{R} \mathbb{E}_t(U_{t+\delta t}) < \varphi(S_t)$  ou non, où  $U_t = PP_{\text{Amer}}(i+1, j+1)$  et donc  $U_{t+\delta t} = PP_{\text{Amer}}(i+2, j+1)$  ou  $U_{t+\delta t} = PP_{\text{Amer}}(i+2, j+2)$ . (La matrice  $\text{ExerPA}(i, j)$  est triangulaire puisqu'on ne considère que les  $j \leq i$ ; commencez par initialiser la matrice avec  $\text{-ones}(n+1, n+1)$  afin de distinguer les valeurs calculées des autres) Pour rendre plus lisible cette frontière d'exercice sur le dessin, on pourra choisir de ne pas représenter les arêtes de l'arbre mais seulement les noeuds et se borner à ne tracer que la "partie basse" de l'arbre (par exemple en se limitant aux noeuds pour lesquels  $S \leq 2 * S_0$ ). Pour déterminer les syntaxes Scilab vous pouvez taper les commandes `apropos plot`, et `apropos LineSpec`.
10. Tracer la frontière d'exercice, à la manière de la figure 6.1. Commencer par  $n=90$ , puis  $n=900$  (ou la valeur la plus grande de  $n$  compatible avec votre programme et votre ordinateur.)
11. Examiner comment varie la frontière d'exercice si l'on fait varier les paramètres  $r$  et  $\sigma$ .
12. Ecrire un algorithme permettant de calculer à chaque instant la composition  $\text{DeltaAmer}(i, j)$  en actif risqué du portefeuille de couverture d'un put américain, lorsque la valeur de l'actif sous-jacent vaut  $S(i, j)$ . Observez et commentez le signe de  $\text{DeltaAmer}(i, j)$
13. Tracer une trajectoire aléatoire et la valeur  $\text{DeltaAmer}(i, j) * S(i, j)$  investie en action dans le portefeuille de couverture.



## A.6 La formule de Black et Scholes ; convergence des prix CRR vers BS

1. Définir une fonction `BlackScholes(S,K,r,T,σ)` donnant la valeur du Call de prix d'exercice  $K$  à la date d'exercice  $T$  lorsque le taux (constant) vaut  $r$  et la volatilité est égale à  $\sigma$ , en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2), \text{ avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln \frac{S_0}{K} + T \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

**Indication :** voyez la fonction `erf` de Scilab.

2. Utiliser la relation Call-Put

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)},$$

pour définir une fonction `Put(S,K,r,T,σ)`.

3. Utiliser la formule fondamentale de Cox-Ross-Rubinstein

$$CRR = S_0\Phi(n, k, q) - Ke^{-rT}\Phi(n, k, p) \text{ avec } u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, p = \frac{R-d}{u-d} \text{ et } q = \frac{pu}{R}$$

pour définir une fonction `CRR(n,S,K,r,T,σ)` donnant le prix du Call dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

4. Tracer `CRR(n,140,140*a,0,1,0.40)` pour  $n = 10..100$  et  $a \in \{1, 0.9, 1.1\}$  et la valeur correspondante dans un modèle de Black et Scholes.

## A.7 Calcul de prix d'options barrière

1. Calculer le prix d'une option DIC sur le sous jacent

$$\begin{cases} S_0 &= 140 \\ S_{t+\delta t} &= S_t \exp(\pm\sigma\sqrt{\delta t}) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

d'échéance  $T = 1 (= n\delta t)$ , de prix d'exercice  $K = 140$  et de barrière  $L = 130$ . On supposera  $\sigma = 0,4$  et  $r = 0$ .

2. Comparer avec le prix du Call vanille de mêmes paramètres.
3. Même exercice pour  $K = 120$ .
4. En déduire le prix de la DOC pour les mêmes valeurs des paramètres.
5. Reprendre les questions précédentes pour un Put avec barrière.

NB : Pour effectuer le calcul du prix au moyen des formules 7.4 et 7.5 données dans le chapitre 7 du cours, il sera utile d'exprimer les sommes binômiales comme des produits scalaires d'un vecteur de probabilités par un vecteur de valeurs de la v.a., selon la formule habituelle d'une espérance  $\sum_i p_i x_i$ . Pour cela on notera que  $A(j, J)$  peut se réécrire en

$$A(j, J) = \binom{n}{j} z_j$$

avec  $z_j = 1$  si  $0 \leq j \leq J/2$ ,  $z_j = 0$  si  $j > J$ , et pour  $J/2 < j \leq J$ ,  $z_j = z(j, -[\ln(L/S_0)/\ln(u)])$ , où  $z(j, a)$  est défini par la relation de récurrence :

$$z(j, a) = z(j, a-1) \frac{n+1-(j+a)}{j+a}, \text{ avec } z(j, 0) = 1. \quad (\text{A.4})$$

En effet, on a

$$\binom{n}{J-j} = \binom{n}{n-(J-j)} = \binom{n}{j+a}$$

avec  $a = n - J = -[\ln(L/S_0)/\ln(u)] > 0$  car  $L < S_0$ . Finalement  $\binom{n}{j+a} = \frac{n!}{(j+a)!(n-j-a)!} = \binom{n}{j} \frac{n-j-a+1}{j+1} \dots \frac{n-j-a+a}{j+a} = \binom{n}{j+a-1} \frac{n-j-a+1}{j+a}$ , et donc on a bien  $\binom{n}{j+a} = \binom{n}{j} z_j$  selon la définition de  $z_j$ .

### Calcul de prix d'options parisiennes

On appelle *option parisienne* une option Call ou Put qui prend (*in*) ou perd (*out*) sa valeur si le cours de l'actif sous-jacent passe *assez de temps* sous (*down*) ou au-dessus (*up*) d'une *barrière*  $L$ . L'instant présent est  $t = 0$ ; l'échéance est  $T$ ; le cours présent du sous-jacent est  $S_0$ ; le prix d'exercice est  $K$ . "Assez de temps" signifie une durée au-delà de la barrière égale à  $\tau$ , appelée *durée d'excursion*. Cette durée peut être *cumulative* (on compte tous les jours passés au-delà de la barrière) ou *non-cumulative* (on ne compte que les jours *consécutifs* passés au-delà de la barrière). Nous noterons  $\text{DICPc}(\tau)$  le prix (prime) d'une option Call parisienne cumulative qui ne prend valeur qu'après une excursion cumulée de durée  $\tau$  sous la barrière  $L$ . De façon analogue, nous noterons  $\text{DOCPnc}(\tau)$  le prix (prime) d'une option Call parisienne non-cumulative qui perd sa valeur après toute excursion sous la barrière  $L$  de durée  $\tau$ . De façon analogue, on définirait  $\text{DIPPc}(\tau)$  ou  $\text{DOPc}(\tau)$  ou  $\text{DIPPnc}(\tau)$  ou  $\text{DOPnc}(\tau)$ , et analogue on ajoutant le suffixe  $\text{Pc}(\tau)$  ou  $\text{Pnc}(\tau)$  aux noms des options barrières usuelles

1. Que peut-on dire du signe de  $\text{DIC}-\text{DICPc}(\tau)$  ? (expliquer)
2. Que peut-on dire de  $\text{DICPc}(\tau)+\text{DOCPc}(\tau)$  ? (expliquer)
3. Nous nous proposons de calculer une estimation de  $\text{DICPc}(\tau)$ , en utilisant un modèle d'arbre binaire, subdivisant  $[0, T]$  en  $N$  intervalles égaux de longueur  $\delta t = T/N$ , avec

$$\begin{cases} S_0 &= 1 \\ S_{t+\delta t} &= S_t \exp(\pm \sigma \sqrt{\delta t}) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

dans le cas  $T = 1$ ,  $\tau = \text{minitime} = 0.30$ ,  $S_0 = 140$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = 140$ ,  $r = 0.05$ ,  $L = 126$ . Voici un code calculant la valeur de l'option en chaque noeud  $(i, j)$  de l'arbre, pour  $n = 17$  :

```
N=17;
T=1;minitime=0.3;// Barrier option corresponds to minitime=1/N;
delta_t=T/N;
S0=140;K=S0; L=S0*0.9;//barrier
r=0.05;sigma=0.4;
up=exp(sigma*sqrt(delta_t)); down=exp(-sigma*sqrt(delta_t));
p=(exp(r*delta_t)-down)/(up-down);
function y=S(n,j) //j=nb of up
    y=S0*up^j.*down^(n-j);
endfunction;
function po=PayOffCall(S,K);
    po=max(S-K,0);
endfunction;
function under=underL(n,j)// equal to 1 if S(n,j) is under the barrier L
    if S(n,j)<=L then under=1;
    else under=0
    end;
endfunction;
PCall=zeros(N+1,N+1,N+1); //PCall(n+1,j+1,k+1); k = number of steps ending
    //under the barrier L
for j=0 :N
    for k=0 :N
        if k*delta_t >= minitime then PCall(N+1,j+1,k+1)=PayOffCall(S(N,j),K);
        else PCall(N+1,j+1,k+1)=0;
        end;
    end;
end;
for n=N-1 :-1 :0
    for k=0 :n
        for j=0 :n
            PCall(n+1,j+1,k+1)=exp(-r*delta_t)*..
```

```

    (p*PCall(n+1+1,j+1+1,k+underL(n+1,j+1)+1)+.
    (1-p)*PCall(n+1+1,j+1,k+underL(n+1,j)+1));
    end;
  end;
end;
disp('minitime='), disp(minitime)
PriceParisianCall=PCall(1,1,1);
disp('Price Parisian Call='), disp(PriceParisianCall)

```

Calculer une estimation de l'option DICPc(0.4) pour  $N = 14$  puis  $N = 15$  et  $N = 16$ . Qu'observez-vous ?

4. Adaptez votre programme pour que `PriceParisianCall` devienne un vecteur donnant les valeurs de DICPc(0.4) pour  $N=1 : 30$ . Tracer en fonction du nombre  $N$  de pas de discrétisation, le prix d'une option DICPc, pour  $N=1 : 30$  (modifier éventuellement 30 à une valeur différente, en fonction de la puissance de votre machine).
5. Qu'observez-vous pour les petites valeurs de  $N$  ? Comment expliquez-vous cela ?
6. Comment adapter ce programme pour qu'il donne le prix d'une option DIC de même prix d'exercice  $K$  et même barrière  $L$  en fonction de  $N$ . NB : ceci peut se faire très facilement (expliquez comment). Qu'obtenez-vous pour DIC(14) ?
7. Représentez sur un même graphique le prix d'une DICPc et d'une DIC en fonction de  $N$ . Qu'observez-vous ? (il y a au moins deux remarques possibles).
8. Adaptez votre programme pour qu'il calcule le prix d'une option Call parisienne *non-cumulative* DICPnc . Reprendre sur un même dessin les prix de DIC, DICPc, et DICPnc pour  $N=1 : 30$ .

## A.8 Modèles de Ho et Lee, et produits de taux d'intérêts

Un modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon  $Z_t^T$ ,  $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$ ,  $\delta t := T_{\max}/N$ ,  $t \leq T$ , où  $Z_t^T$  désigne la valeur à la date  $t$  d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date  $T$ . On a donc  $Z_T^T = 1$  pour n'importe quel  $T \in \mathbb{T}$ . C'est un modèle probabiliste sur un ensemble  $\Omega$  servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  servant à coder l'information disponible à la date  $t \in \mathbb{T}$ . En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$ ,  $\mathbb{T}^* := ]0..T]_{\delta t}$ ,  $X_t \in \{0, 1\}$ , les  $X_t$  de même loi  $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$ ,  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, et indépendantes de  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ <sup>3</sup>. Pour tout  $t \in \mathbb{T}^*$ , posons  $J_t := \sum_{s \in ]0..t]_{\delta t}} X_s$ . Notons  $n$  et  $k$ ,  $n \leq k$ , les entiers tels que  $t = n\delta t$  et  $T = k\delta t$ ; la caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les  $Z_t^T(\omega)$  appartiennent à un arbre binaire recombinaut, c'est-à-dire que,  $Z_{n\delta t}^T(\omega)$  ne prend que  $n + 1$  valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur  $j = J_{n\delta t}(\omega)$ . Pour  $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$ , nous noterons  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega) := Z(\mathbf{n}, j, \mathbf{k})$ .

1. Montrer que  $Z(\mathbf{k}, j, \mathbf{k}) = 1$ .
2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^T} \eta(\theta^T(t), X_t), \text{ où } \theta^T(t) := T - t, \quad (\text{A.6})$$

pour une fonction  $\eta$  définie par le choix<sup>4</sup> d'un  $\delta > 1$ , caractérisant, avec  $\pi \in ]0, 1[$ , le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \quad (\text{A.7})$$

Les valeurs des  $Z_0^T$ ,  $T \in \mathbb{T}$ , peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché.

Vérifier que  $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t) \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) = 1$ , pour tout  $\theta$  et  $t$  dans  $\mathbb{T}^*$ , et où  $\mathbb{E}^*$  désigne l'espérance pour la probabilité  $\mathbb{P}^*$ .

<sup>3</sup>Attention, dans l'article de M. Leippold et Z. Wiener ( <http://papers.ssrn.com/abstract=292225> ), il est fait le choix  $\mathbb{P}(X_t = 0) = (1 - \pi)$

<sup>4</sup>C'est le choix  $\delta = (\eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0)) > 1$  qui exprime qu'un  $X_t(\omega) = 1$  code un "up" et  $X_t(\omega) = 0$  code un "down"

3. On définit le taux court, “sans risque”  $r_t$ , par

$$Z_t^{t+\delta t}(1+r_{t+\delta t}) = 1; \quad (\text{A.8})$$

on voit donc que  $r_{t+\delta t}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable (on dit que le processus  $(r_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$  est  $\mathbb{F}$ -prévisible); on pose

$$B_t := (1+r_{\delta t})(1+r_{2\delta t}) \dots (1+r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T/B_t.$$

En établissant que  $\mathbb{E}^*(\tilde{Z}_t^T | \mathcal{F}_{t-\delta t}) = \tilde{Z}_{t-\delta t}^T$ , montrer que  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in \mathbb{T}}$  est une  $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$ -martingale, et que ce modèle est donc sans arbitrage.

4. Voici une implantation du modèle pour lequel on a  $T_{\max} = N$  (et donc  $\delta t = 1 = \text{delta\_t}$ ),  $t = n * \text{delta\_t}$ ,  $T = k * \text{delta\_t}$ ,  $J_t(\omega) = j$ ,  $T - t = l * \text{delta\_t}$ ,  $\eta(T - t, X_t(\omega)) = \text{eta}(l * \text{delta\_t}, x)$ , pour  $x = X_t(\omega)$ ,  $Z_t^T(\omega) = Z(n, j, k)$ , pour  $J_t(\omega) = j$ , avec les choix  $\pi = \text{pi} := 0.5$ , et  $\delta = \text{delta} := 1.01$ .

```
// Modèle de Ho et Lee
clear ; Nmax=8 ; Tmax=Nmax ; delta_t=Tmax/Nmax ;
pi=0.5 ; delta=1.01 ; r=0.025 ;
function z0=Z0(k) ; z0=(1+r)^(-k*delta_t) ; endfunction ;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax)) ;
//
function ee=eta(l,x) ;
if x==0
ee=(1^l)/(pi+(1-pi)*delta^l) ;
else ee=delta^l/(pi+(1-pi)*delta^l) ;
end ;
endfunction ;
// représentation des eta extrêmes
xset("window",1) ; clf(1) ;
Nprime=1000 ; for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)) ; end ;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1) ;
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k) ;
end ;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1) ;
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1) ;
end ;
end ;
end ;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1) ;
endfunction ;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2) ; clf(2) ;
N=Nmax ;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),"-b") ; end ;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1) ;
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N) ;
```



```
end ;
plot(n1 :N,Vecteur,"--r");
end ;
xs2gif(2,"arbHoLee.gif");xs2eps(2,"arbHoLee.eps");xs2fig(2,"arbHoLee.fig");
```

- (a) Comment a été choisie la fonction  $T \mapsto Z_0^T$  constituée par les valeurs initiales de  $Z_t^T$  ?
- (b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de  $Z^8$  : que vaut  $Z_8^8$  ? Que vaut  $Z_0^8$  et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale` ? Que vaut  $Z_4^8$  après deux "up" et deux "down" ? Que vaut  $Z_6^8$  après rien que des "up" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance  $T = 8$  est "above par" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

5. **Taux actuariels** : On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté  $A_t^T$  (ou  $a(t, T)$ ) tel que

$$Z_t^T(1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour  $t < T$ .

- (a) Définir une fonction  $\mathbf{A}(n, j, k)$  correspondant au zéro-coupon  $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$  quand  $J_{n\delta t}(\omega) = j$ , qui est lui de valeur  $\mathbf{Z}(n, j, k)$ .
- (b) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de  $A_t^T$  aux deux valeurs  $A_{t+\delta t}^T$  pouvant lui succéder dans ce modèle.
- (c) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour  $Z_6^8$  dans la question précédente.

6. **Caplets et Caps** : Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal  $K$ . Typiquement, si l'intérêt  $r_T$  payable à la date  $T$  pour l'emprunt d'un euro à la date  $T - \delta t$ , ce contrat payera  $(r_T - K)^+$ . Ce contrat s'appelle un *caplet* à l'échéance  $T$  au plafond  $K$ . Pour le prêt d'un euro remboursable à la date  $T_{\max}$  et à intérêts payable à intervalle  $\delta t =$  un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance  $T \in ]0..T_{\max}]_{\delta t}$ . Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date  $t - \delta t$ , par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en  $Z_{t-\delta t}^t$  et un placement (risqué) en  $Z_{t-\delta t}^{t+\delta t}$ . Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus  $(\tilde{Z}_t^T)_{t \in [0..T]}$  sont, pour tout  $T \in \mathbb{T}$ , des  $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$ -martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\text{Caplet}_{t-\delta t}^T = \mathbb{E}^*(\text{Caplet}_t^T \mid \mathcal{F}_{t-\delta t}) / (1 + r_t) \tag{A.9}$$

(et plus généralement, pour tous  $s \leq t$ ,  $\text{Caplet}_s^T = \mathbb{E}^* \left( \text{Caplet}_t^T \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s \right)$ ).

De manière similaire au cas des zéro-coupons et taux actuariels, notons  $\text{Caplet}_t^T(\omega) = \mathbf{Caplet}(n, j, k)$ , toujours avec  $t = n\delta t$ ,  $J_t(\omega) = j$ , et  $T = k\delta t$ .

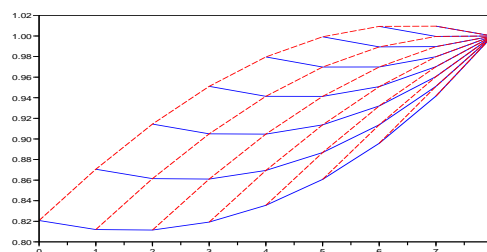
**n=k**) Comment définir  $\mathbf{Caplet}(k, j, k)$  ?

**n=k-1**) Comme  $1/(1 + r_t) = Z_{t-\delta t}^t$ , montrer que  $\mathbf{Caplet}(k-1, j, k) = \mathbf{Caplet}(k, j, k) * \mathbf{Z}(k-1, j, k)$ .

**n<k-1**) Exprimer  $\mathbf{Caplet}(n, j, k)$  en fonction de  $\mathbf{Caplet}(n+1, j, k)$  et  $\mathbf{Caplet}(n+1, j+1, k)$  lorsque  $n < k-1$ , en utilisant (A.9).

**func**) Définir une hypermatrice  $\mathbf{CCaplet}(n, j, k)$  et une fonction  $\mathbf{Caplet}(n, j, k)$  donnant la valeur de  $\text{Caplet}_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$  lorsque  $J_{n\delta t}(\omega) = j$ .

**Application** : Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où  $r_{\delta t} = 2,5\%$ ), quel est le prix d'un contrat de plafonnement à  $K = 4,5\%$  des intérêts payés annuellement sur un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans. Idem pour un plafonnement à 3,5%



## A.9 Incidence du paiement d'un dividende sur le prix d'une action et d'une option

Le paiement de dividendes est, avec le droit de révoquer le management (les gestionnaires de l'entreprise côté), le principal contrôle qu'exercent les actionnaires sur cette entreprise. La date  $t^*$  et le montant  $D$  de ce dividende sont fixés par l'AG, longtemps avant  $t^*$ . Le marché anticipe donc ce paiement. Si l'on note  $\Pi_t$  la valeur d'un portefeuille géré en dividende réinvesti (on ne modifie pas la somme qu'on a investie dans l'entreprise), il est légitime de supposer que c'est  $\Pi_t$  qui suit un modèle CRR :

$$\Pi_0 = S_0, \Pi_{t+\delta t} = \Pi_t^\pm := \Pi_t u^\pm \text{ avec } u^+ = \text{up} = u \text{ et } u^- = \text{down} = d.$$

Par gestion en dividende réinvesti on entend qu'à la date  $t^*$ , lorsque  $D$  est versé, la somme sert à acheter une fraction  $c = \frac{D}{S_{t^*}}$  d'action pour chaque action détenue (et donnant droit au versement de  $D$ ) donc avant  $t^*$ , une action est détenue et donc  $\Pi_t = S_t$  pour  $t < t^*$ , alors qu'à  $t^*$  et après, il y a  $(1+c)$  actions détenues, et donc

$$\Pi_t = S_t(1+c) \quad (t \geq t^*) \quad (\text{A.10})$$

d'où  $S_t = \frac{1}{1+c}\Pi_t$  et en particulier

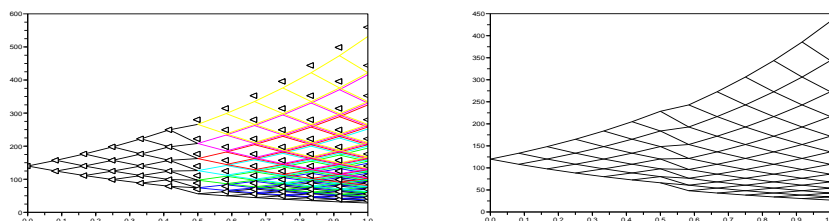
$$\begin{aligned} S_{t^*} &= \frac{1}{1+c}\Pi_{t^*} = \frac{1}{1+c}\Pi_{t^*-\delta t}u^\pm = \frac{1}{1+c}S_{t^*-\delta t}u^\pm \\ &= \frac{1}{1+\frac{D}{S_{t^*}}}S_{t^*-\delta t}u^\pm \end{aligned}$$

qui, après calcul, donne simplement

$$S_{t^*} = S_{t^*-\delta t}u^\pm - D$$

alors que pour  $t > t^*$ , (A.10) redonne

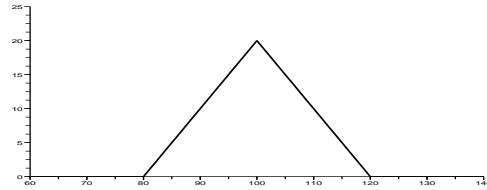
$$S_t = S_{t-\delta t}u^\pm \text{ pour } t > t^*, \text{ comme pour } t < t^*.$$



1. Que peut-on dire des trajectoires de  $\Pi$  ?
2. Définir une fonction  $S(n, j1, j2)$ , où  $j1$  représente le nombre de  $up$  ayant lieu pour  $t \leq t^*$  et  $j2$  représente le nombre de  $up$  ayant lieu pour  $t > t^*$ , en posant  $t^* = N1\delta t$ , avec  $N1=6$  et  $D = (0.1)S_0$  (ce qui signifie que le CA a décidé de verser un dividende égal à 10% de la valeur de l'action à la date  $t = 0$ ). Vous stockerez ses valeurs dans un hypermatrice  $SS(0+1 : N+1, 0+1 : 1+N1, 0+1 : 1 : (N-N1)+1)$ .
3. Expérimentez pour déterminer la plus grande valeur de  $N1$  acceptée par Scilab avec  $N=2*N1$ . Observez qu'on n'utilise que les éléments  $SS(n+1, j1+1, 0+1)$  pour  $0 \leq j1 \leq n \leq N1$  et  $SS(n+1, j1+1, j2+1)$  pour  $0 \leq j2 \leq n-j1$  et  $0 \leq j1 \leq N1$ . L'hypermatrice  $SS$  est donc très creuse : essayez de la déclarer en `sparse` ; cela permet-il d'utiliser une plus grande valeur de  $N1$  ?
4. Tracer les trajectoires de  $S$ .
5. Calculer et tracer les prix d'options call et put européennes, pour  $K=S_0$ . On commencera par calculer le vecteur `CallAuPaiementDiv(0+1 : N1+1)` des valeurs du Call à l'instant  $t^* = N1*\delta t$ , lorsque  $S_{t^*} = S(N1, j1)$ .
6. Calculez les prix des options call et put américaines, pour  $K=S_0$ . Qu'observez-vous pour le prix du Call américain ?

## A.10 Examen 2006-2007

On appelle *butterfly*  $BTF := B(T, K1, K2, K3)$  sur l'actif  $S$  de date d'exercice  $T$  un contrat payant à la date  $T$  le payoff  $\varphi(S_T)$ , affine par morceaux, nul en dehors de  $[K1, K3]$ , maximal en  $K2 \in ]K1, K3[$  du type suivant



Payoff d'un butterfly  $B(T, 80, 100, 120)$  :

1. Montrer qu'on peut réaliser un butterfly  $B(T, K1, K2, K3)$  en prenant une combinaison simple de Call de même date d'exercice et de valeur d'exercice (strike) respective  $K1, K2$ , et  $K3$ . Indication : représenter le payoff relatif à la détention d'un Call de strike  $K1$  et la vente (à découvert) de deux Call de strike  $K2$ , ce qu'on peut noter  $1 * C^{K1} - 2 * C^{K2}$ .
2. Définir le payoff, comme sur la figure ci-dessus (on supposera dorénavant que  $K1, K2$ , et  $K3$  sont comme sur la figure) par une fonction Scilab, puis tracer son graphe.
3. On considère un modèle de Cox-Ross-Rubinstein d'actif  $S_t$  défini sur  $[0..T]_{\delta t}$ . On suppose que  $T = 1$ ,  $\delta t = T/N$  avec  $N = 60$ ,  $S_0 = 120$ ,  $\sigma = 0.3$ , le taux continu vaut  $r = 0.05$ . Pour  $t \in [0..T]_{\delta t}$  on note  $BTF_t$  la valeur, dans ce modèle, à la date  $t$ , du butterfly  $BTF$ . Calculer  $BTF_0$ .
4. Pour  $n = 0..N$ , calculer les valeurs de  $BTF_{n\delta t}$  en fonction des valeurs de  $S_{n\delta t}$ . Représentez ces diverses courbes sur un même dessin.

**Rappel :** la commande Scilab `plot2d(AA(1 :M), BB(1 :M), [xmin,ymin,xmax,ymax])` représente la ligne polygonale joignant les  $M$  premiers points dont les abscisses et ordonnées sont les premières composantes des vecteurs  $AA$  et  $BB$ , et qui sont dans le rectangle caractérisé par  $[xmin,ymin,xmax,ymax]$ .

5. On souhaite couvrir 10.000 contrats butterfly  $B(1, 80, 100, 120)$ . Combien de sous-jacents  $S_0$  doit-on acquérir ?
6. On considère à présent un contrat butterfly  $B^a(T, K1, K2, K3)$  de type américain (il donne droit au payoff à un instant quelconque  $t \leq T$ ) ; on note  $BTF_t^a$  son prix à chaque instant  $t$ . Calculer la prime  $BTF_0^a$  du butterfly américain  $B^a(1, 80, 100, 120)$ . Que remarquez-vous ? Dans ce cas, combien de sous-jacents  $S_0$  doit-on acquérir pour commencer à couvrir 10.000 contrat de ce butterfly américain  $B^a(1, 80, 100, 120)$  ?
7. Un investisseur place 10.000 euros au taux EURIBOR-1Y (taux à un an). On suppose que ce taux suit un modèle de Ho et Lee (avec un pas de temps égal à un an). Pour une probabilité risque-neutre  $\pi = 0.5$  on suppose que  $\delta = 1.01$ . Le taux EURIBOR actuel (moment du placement) est de  $r = 0.044$ . On suppose que la courbe actuelle des taux sur 15 ans correspond à un taux constant, égale au taux en vigueur.  
Quels sont, dans ce modèle, les intérêts qui pourraient être versés à l'investisseur après un an et après deux ans ?
8. L'investisseur souhaite se garantir, pendant 15 ans, un flux d'intérêts annuels au moins égaux au taux à la souscription. Comment s'appelle le contrat garantissant cela ? Notons  $F_r^{15}$  son prix.
9. Quel est, dans le modèle considéré, le prix  $F_r^{15}$  de ce contrat ?
10. Représenter la courbe des prix  $F_{r+m\delta r}^{15}$  pour  $\delta r = 0.001$  et  $m = -20..+20$ .

## A.11 Examen 2007-2008

Nous allons étudier un autre modèle pour le prix d'une action distribuant un dividende qui, tout en étant aussi réaliste, se prête mieux au calcul pour de grandes valeurs du nombre  $n$  de pas de discrétisation de  $[0, T]$ . Supposons qu'à  $t = 0$  l'assemblée générale des actionnaires décide de la distribution, à la date  $t^*$ , d'un dividende  $D$  pour chaque action détenue. A  $t = 0$  ce dividende futur vaut  $De^{-rt^*}$  et, plus généralement, il vaut  $De^{-r(t^*-t)}$  à la date  $t$ , où  $r \geq 0$  représente le taux d'intérêt sans risque.

Jusqu'à  $t^*$  le prix  $S_t$  de l'action "includ" cette valeur déterministe et suit une dynamique

$$S_t = X_t + De^{-r(t^*-t)} \text{ pour } t < t^*, \text{ puis} \quad (\text{A.11})$$

$$S_t = X_t \text{ pour } t \geq t^*. \quad (\text{A.12})$$

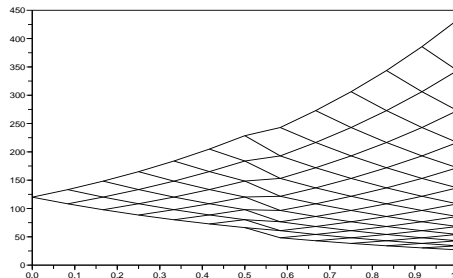
(et le détenteur de l'action à la date  $t^*$  touche à cette date) le dividende  $D$ . Le modèle étudié ici consiste à poser que c'est  $(X_t)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$  qui suit un modèle  $CRR$

$$X_{t+\delta t} = X_t u_{t+\delta t}^{\pm}, \text{ où } u_{t+\delta t}^{\pm} \in \{\text{up}, \text{down}\}, \quad (\text{A.13})$$

avec  $\text{up} = e^{+\sigma\sqrt{\delta t}}$ , et  $\text{down} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ ,  $\delta t = \text{delta\_t} = T/n$ , où  $T > t^*$  est un "horizon futur", par exemple la date d'exercice d'une option européenne que ce modèle doit servir à valoriser ("pricer").

Comme dans le TD, on fixe  $T = 1$ ,  $r = 0.05$ ,  $R = e^{r\delta t}$ ,  $\text{sigma} = \sigma = 0.40$ ,  $S_0 = 120$ ,  $D = S_0 * 0.10$ ,  $n = N1 + N2$ ,  $N1 = 6 = N2$  (pour commencer),  $t^* = N1 * \text{delta\_t}$

Trajectoires du modèle d'action distribuant un dividende étudié ici : on observera que ce modèle est



bien recombinant ce qui simplifie largement les calculs

1. Que vaut  $X_0$  ?
2. Former<sup>5</sup> la matrice  $XX$ , où  $XX(i+1, j+1)$  est la valeur de  $X_{i\delta t}$  dans le modèle considéré, après  $j$  "up". Vérifiez que  $XX(n+1, 1) = 27,091...$ . Quelles valeurs trouvez-vous pour  $XX(n+1, n+1)$  et pour  $X_{T/2}$  après 2 "up" ?
3. Former la matrice  $SS$ , où  $SS(i+1, j+1)$  est la valeur de  $S_{i\delta t}$  dans le modèle considéré, après  $j$  "up". Vérifiez qu'après 0 "up"  $S_{\delta t}$  vaut 108,238. Quelles valeurs trouvez-vous pour  $SS(n+1, 1)$ , et pour  $S_{\delta t}$  après 1 "up" ?
4. Calculer la probabilité  $p = \mathbb{P}^*(\{u_t^{\pm} = \text{up}\})$  (usuelle) pour laquelle  $\tilde{X}_t := e^{-rt} X_t$  est une martingale.
5. On considère une option Call à la monnaie sur  $S$ , de date d'exercice  $T$  et on note  $C_t$  sa valeur à chaque  $t \in [0..T]_{\delta t}$ . On note  $CC$  la matrice telle que  $CC(i+1, j+1) = C_{i\delta t}$  lorsque  $S_{i\delta t}$  a subi  $j$  "up". Affecter les valeurs convenables à  $CC(n+1, j+1)$  pour  $j=1 : n$ . Quelles valeurs trouvez-vous pour  $CC(n+1, 1)$  et  $CC(n+1, n+1)$  ?
6. Affecter les valeurs convenables à  $CC(i+1, j+1)$  pour  $i=n-1 : -1 : N1$  et  $j \leq i$  calculées à l'aide de  $p$  et  $R$ . Vérifiez que vous trouvez  $CC(N1+1, N1+1) = 99.687...$  ; que trouvez-vous pour  $CC(N1+1, N1-1+1)$  ?
7. Prix de l'option à la "veille" de la distribution du dividende.
  - (a) Calculer la composition ( $a$  actions et  $b$  cash) du portefeuille de couverture formé la date  $t = t^* - \delta t$ , en fonction de  $S = X + D/R$  ( $:= S_{t^* - \delta t}(\omega) = X_{t^* - \delta t}(\omega) + e^{-r\delta t} D = SS(N1-1+1, j+1)$ ), et de  $C^+$  et  $C^-$ , où  $C^+$  et  $C^-$  désignent comme d'habitude la valeur de l'option selon que  $S_{t^*} = S^+$  ou  $S_{t^*} = S^-$ . Commencer par exprimer les deux valeurs  $S^+$  et  $S^-$  à l'aide de  $X$ ,  $u = \text{up}$  et  $d = \text{down}$ , puis former le système linéaire caractérisant  $a$  et  $b$ , en n'oubliant pas que chaque action reçoit  $D$  à la date  $t^*$ .
  - (b) Calculer le prix  $C (= C_{t^* - \delta t}(\omega))$  de ce portefeuille. Trouvez  $q$  tel que  $C = (qC^+ + (1-q)C^-)/R$  ; qu'observez-vous ? Affecter les valeurs convenables à  $CC(N1-1+1, j+1)$  pour  $j=0 : N1-1$
8. Vérifier de façon analogue que, pour tout  $t = i\delta t < t^* - \delta t$ , lorsque  $S_t = S = X + R^{-k} D$  (avec  $k = N1 - i$ ), la relation  $C_t = (pC_t^+ + (1-p)C_t^-)/R$  est toujours satisfaite. Affecter les valeurs convenables à  $CC(i+1, j+1)$  pour  $i=N1-2 : -1 : 0$ .
9. Quel est le prix  $C_0$  de l'option à la date  $t = 0$  (prime de l'option) ?
10. On choisit à présent  $N1=50$  et  $N2=50$  ; que vaut dans ce cas la prime  $C_0$  ?
11. Soit  $\Pi_t$  la valeur du portefeuille composé d'une action pour  $t < t^*$  et d'un action et de son dividende placé au taux sans risque pour  $t \geq t^*$ . Calculer  $\Pi_t$  en fonction de  $X_t$ ,  $r$ ,  $t$ , et  $D$  et en déduire que  $\tilde{\Pi}_t := e^{-rt} \Pi_t$  est une martingale et que le modèle que nous avons étudié est donc sans arbitrage.

<sup>5</sup> Veuillez noter qu'à la question 10 on demandera de refaire tous les calculs pour d'autres valeurs de  $N1$  et  $N2$  et que vous avez donc tout intérêt à déterminer vos réponses à l'aide de commandes consignées dans un fichier `monnom.sce` que vous pourrez ensuite reexécuter pour ces autres valeurs.

12. En vous inspirant de ce qui a été fait pour CC programmez les valeurs de la matrice CCA telle que CCA(i+1, j+1) représente cette fois la valeur d'une option *américaine*  $C_t^a$  (de même date d'exercice et de même prix d'exercice) à la date  $t = i\delta t$  lorsque l'action a subi  $j$  "up". Quelle valeur de la prime  $C_0^a$  obtenez-vous (pour N1=50 et N2=50)? Que remarquez-vous?

## A.12 Examen 2008-2009

**Exercice 1.** : On considère le modèle CRR d'actif financier lorsque la valeur initiale  $S_0 = 200$ , la volatilité  $\sigma = 0.42$ , et le pas de temps  $\delta t = 1/120$ .

1. Calculer avec Scilab une matrice  $SS(i, j)$  donnant les différentes valeurs de l'actif et indiquer ci-dessous les 4 valeurs qu'il peut prendre à l'instant  $t = 3\delta t$ .
2. On suppose que le taux d'escompte monétaire  $r$  est constant et vaut  $r = 0,2$ . On considère un Put européen  $P_t$  sur l'actif précédent de prix d'exercice  $K = 180$  et de date d'exercice  $T = 1$  et le Put américain  $Pa_t$  de même prix d'exercice et date d'exercice, sur le même actif. Expliquez comment se calculent par récurrence rétrograde les prix de ces deux Puts.
3. Calculer avec Scilab deux matrices  $PP(i, j)$  et  $PPa(i, j)$  qui indiquent le prix de ces deux Put et préciser ci-dessous les valeurs trouvées pour chacun d'eux à l'instant  $t = 0$ . Comment s'appelle la différence  $Pa_0 - P_0$ ? Expliquer pourquoi elle est positive.

**Exercice 2.** : On rappelle qu'une option DIP (respectivement DOP) est une option Put qui ne prend sa valeur à l'instant final  $T$  que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous (respectivement n'est pas passé en dessous) d'une barrière qu'on prendra ici égale à  $L = 160$ . Définir avec Scilab une matrice  $DIP(i, j, k)$  dont la valeur en  $i = j = k = 1$  est la valeur initiale d'une option DIP. Faire de même pour une option DOP.

1. Indiquer ci-dessous les valeurs de ces deux options à l'instant  $t = 3\delta t$ , si l'actif sous-jacent n'a cessé de décroître entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = 3\delta t$ .
2. Que peut-on dire des trois quantités Put, DIP et DOP à l'instant initial; expliquer.

**Exercice 3.** :

On désigne par  $ZZ(i, j, k)$  la matrice de Scilab représentant dans un modèle de Ho et Lee la valeur à l'instant  $t = i\delta t$  du zéro coupon de maturité  $T = k\delta t$  lorsqu'il y a eu depuis l'instant  $t = 0$   $j$  "up". Exécuter le programme Scilab permettant de calculer les différentes valeurs du Zéro coupon pour les valeurs suivantes des paramètres du modèle

$$Nmax = 15, \quad r = 0,02, \quad pi = 0.5, \quad delta = 1.015, \quad \delta t = 1$$

$$Z_0^{k\delta t} = \exp(-rk\delta t)$$

1. Indiquer ci-dessous les valeurs trouvées et commentez
  - $Z_{15}^{15}$  (expliquer)
  - $Z_0^5$  et  $Z_0^{15}$  (comparer et expliquer)
  - Que vaut  $Z_5^8$  après trois "up" et deux "down" ?
  - Que vaut  $Z_6^{15}$  après rien que des "down" ?
2. En vous inspirant des exercices du TP1, écrire un programme Scilab qui simule  $M$  trajectoires du modèle de Ho et Lee puis, à l'aide de la commande `histplot`, tracer l'histogramme de la loi de cette marche à l'instant  $t = 8$ . Reproduire votre programme ci-dessous et une esquisse de l'histogramme. Pouvez-vous deviner la loi à l'instant  $t = Tmax$  ?

**Exercice 4.** : Micro-crédit : modèle de Tadeschi, sans exclusion, avec catégories. On considère un modèle de Tadeschi simplifié, sans temps d'exclusion, mais avec plusieurs niveaux de bénéficiaires : lorsqu'un bénéficiaire rembourse son prêt il passe dans un niveau supérieur (qui lui donne accès à plus de prêt ou à un meilleur taux), jusqu'à un niveau maximal, "hors catégorie". La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur  $D$ . Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité  $\gamma$  de se voir attribuer un prêt et il devient alors un bénéficiaire "B". On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité  $\alpha$  de ne pas rembourser son prêt : dans ce cas il redevient demandeur. Dans l'autre cas, favorable, il passe en catégorie supérieure. On envisage quatre catégories :  $B_1 = B$ ,  $B_2 = B^+$ ,  $B_3 = B^{++}$ , et  $B_4 = B^*$ , la "hors catégorie".

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov à cinq états  $D$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , et  $B_4$  correspondant à ce modèle.
2. Ecrire la matrice de *passage*  $P$  (ou de *transition*) de cette chaîne.
3. (facultatif) trouver (au moyen de Maple par exemple) son vecteur propre unitaire  $\pi^*$  associé à la valeur propre 1 : c'est une distribution d'équilibre de la chaîne.
4. Rappelons que, sous des hypothèse assez générale,  $P^n$  tend vers une matrices dont toutes les lignes sont égales à  $\pi^*$ . Application numérique : choisir  $\alpha = 0.10$  et  $\gamma = 0.50$  ; calculer  $P^{50}$  et donner  $\pi^*$ . Commentez votre résultat.

# Bibliographie

- [1] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] Thomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.
- [4] Nicolas Bouleau. *Martingales et marchés financiers*. Editions Odile Jacob, 1998.
- [5] John Cox, Stephen Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.
- [6] Rose-Anne Dana and Monique Jeanblanc-Piqué. *Marchés financiers en temps continu*. Economica, 1998.
- [7] John Hull. *Options, Futures, and other derivatives*. Prentice-Hall, 1997.
- [8] Jean Jacod and Philip Protter. *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini, 2003.
- [9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Application of Mathematics, stochastic modelling and applied probability*. Springer, 1998.
- [10] Damien Lambertson and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, volume 9 of *Mathématiques et applications*. Ellipse, 1993.
- [11] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in Financial modelling*, volume 36 of *Applications of mathematics*. Springer, 1997.
- [12] Stanley R. Pliska. *Introduction to mathematical finance, discrete time models*. Blackwell publishers, 1997.
- [13] Albert N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced series on statistical science and applied probability*. World scientific, 1999.
- [14] Paul Wilmott. *Derivatives*. John Wiley and sons, 1998.
- [15] Paul Wilmott, Sam Howison, and Jeff Dewynne. *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press, 1995.