Université de Nice — L2MASS, Option MPAD2, année 2010-2011
Département de Mathématiques — Modèles Probabilistes Appliqués au Développement Durable
NOM : — Date : .
PRENOM : — Groupe : .

Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On reprend la chaine de Markov de l'exemple introductif pour lequel $S = \{h, a, f\}$ et

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ h \\ a \\ f \end{array}$$

(columns labelled h, a, f)

.

1. Trouver les probabilités $P(X_1 = a/X_0 = h)$ et $P(X_1 = a/X_0 = a)$.

2. Interpréter le fait que $P(X_1 = h/X_0 = f) = 0$.

3. Selon ce modèle si la chaine X_t est en un point dans l'état d'arbuste, est-il plus probable qu'elle évolue vers l'état de forêt ou vers celui d'herbe ?

4. Calculer la probabilité des trajectoires suivantes (h, a, f, h), (h, a, f, a), (a, a, a).

5. Sans changer l'espace d'états S, on suppose cette fois que la matrice de transition $\mathbb{P}$ vaut

$$\begin{pmatrix} ..... & 0,45 & 0 \\ 0,2 & ..... & 0,4 \\ 0,05 & ..... & 0,95 \end{pmatrix}$$

Compléter les valeurs manquantes de $\mathbb{P}$ et tracer le diagramme en points et flèche associé.

Exercice 2. **:** On suppose[1] que l'on s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E1 et E2. Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que 1% d'entre eux meure chaque année alors que ce taux est de 5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 75% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 25% pour un arbre de la première espèce.

1. Expliquer comment l'on peut modéliser la dynamique de cette foret par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à deux états $E1$ et $E2$ et justifier la formule suivante :

$$P(X_{t+1} = E_1/X_t = E_1) = 0,99 + 0,01 \cdot 0,25 = 0,9925.$$

2. En déduire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov .

3. Tracer le diagramme en points et flèches associé.

4. Si l'on commence avec une population de 10 arbres de l'espèce $E1$ et 990 de l'espèce $E2$, combien aura-t-on d'arbres de l'espèce $E1$ après une étape, après deux étapes ?

5. Calculer l'image de la distribution $\pi_0 = (0,01 \;\; 0,99)$ par cette chaîne de Markov.

6. Reprendre les deux questions précédentes si l'on suppose qu'il y a au départ une proportion de cinq arbres de la première espèce contre trois de la seconde.

[1] Exemple extrait du livre "Mathematical Models in Biology", E.S. Allman et J.A. Rhodes, Cambridge University Press, 2004