Université de Nice
Nice-Polytech

Année 2014-2015
MMDFA

Cours 3 : Crédit et microcrédit

Cette leçon est une modeste excursion dans un vaste et important chapitre de la finance mathématique qui concerne le crédit et les taux d'intérêts.

L'intérêt est avant tout la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un préteur à un emprunteur. C'est probablement l'une des activités finacières les plus anciennes, déja pratiquée dans la plus haute antiquité. Pour le préteur, l'intérêt est le prix de la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le prix payé pour une jouissance immédiate.

Au fil du temps les intérêts, accusés d'appauvrir les uns au profit d'autres ont fait souvent l'objet d'interdiction ou de limitations. Ils sont perçus de façon bien différente selon les cultures et selon les religions. Ainsi la Bible (dans l'ancien testament) et le Coran contiennent des passages qui condamnent fermement la pratique du prêt à intérêts. Les choses ont été codifiées dans la religion juive par l'interdiction de demander des intérêts. Cette même règle a été aussi longtemps en vigueur dans la religion catholique. Les protestants ont contribués à la levée progressive de son interdiction dans les pays européens, restée pourtant en vigueur jusqu'en 1830. Pour l'islam, l'interdit subsiste et le développement récent de banques islamiques fonctionnant sur des principes différents en est une conséquence importante. Quoiqu'il en soit la question de l'intérêt reste un sujet sensible qui est encore souvent perçu différemment selon les origines culturelles des intervenants.

1 Capitalisation et actualisation

Le principe de base de la capitalisation est qu'un Euro aujourd'hui n'est pas égal à un Euro demain mais qu'il vaudra alors (un peu) plus : c'est ce que l'on appelle la *valeur temps de l'argent.* Ainsi un montant B_0 placé durant une période δt accumule un intérêt $B_0\rho > 0$ et vaudra donc $B_0(1+\rho)$ à l'issue de cette période. On parle d'*intérêts simples* lorsque l'intérêt accumulé est le même à chaque période et donc, à l'issue de n périodes, $T = n\delta t$, il vaudrait $B_0(1+n\rho)$. Mais, en général, on considère plutôt que les intérêts accumulés pendant une prériode rapportent à leur tour des intérêts durant la période suivante et ainsi de suite : c'est la formule des *intérêts composés.* Ainsi le montant B_0 vaudra encore $B_0(1+\rho)$ à l'issue de la première période mais il vaudra $[B_0(1+\rho)](1+\rho) = B_0(1+\rho)^2$ à l'issue de la deuxième et $B_T = B_0(1+\rho)^n$ après n periodes.

La suite de quantités $B_0, B_{\delta t}, \ldots, B_T$ forment donc une progression géométrique de raison $(1+\rho)$ (alors que dans le cas d'intérêts simple c'est une progression arithmétique). Si l'on désigne, comme précédemment, par t les instants successifs multiples de δt, $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, et si l'on définit r comme étant le nombre réel tel que

$$e^{r\delta t} = 1+\rho$$

nombre que l'on appelle le *taux d'intérêt continu*, on peut réécrire la suite des $B_{k\delta t} = B_t$ comme une fonction exponentielle du temps

$$B_t = B_0 e^{rt} \text{ , avec } B_0 \text{ souvent choisi égale à 1, sans perte importante de généralité.}$$

C'est cette écriture que nous utiliserons le plus souvent par la suite. A noter que pour r assez petit, comme $e^{r\delta t} = 1 + r\delta t + \frac{1}{2\,!}(r\delta t)^2 + \ldots$, l'intérêt ρ est peu différent de $r\delta t$, les termes suivants du développement limité étant parfois négligés.

Tout comme un Euro aujourd'hui vaudra $e^{r\delta t}$ à l'issue d'une periode δt, la valeur actuelle d'un Euro délivré en δt vaut aujourd'hui $e^{-r\delta t}$. En effet la quantité $e^{-r\delta t}$, qui est (un peu) plus petite que 1, vaudra $(e^{-r\delta t})e^{r\delta t} = 1$ après une période. Lorsqu'un actif prend de la valeur au cours du temps en accumulant des intérêts, on parle de *capitalisation.* A l'inverse la prise en compte dans l'évaluation d'un actif de sa valeur actuelle au lieu de sa valeur future s'appelle l'*actualisation.* On note $\tilde{C}_t$ la *valeur actualisée à* l'instant $t = 0$ de la quantité C_t, c'est-à-dire $\tilde{C}_t := e^{-rt}C_t$.

A noter que la valeur actualisée de la suite des $B_t = e^{rt}, t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\}$ est la suite constante.

2 Microcrédit

Le microcrédit est un ensemble de contrats permettant d'offrir de très petits crédits à des individus très pauvres pour les aider à développer de petites entreprises ou des activités génératrices de revenus.

L'idée de base est partie de la constatation qu'une grande part de l'humanité n'a pas accès au crédit traditionnel car les banques exigent de leurs emprunteurs qu'ils satisfassent toute une série de critères, comme le fait de savoir lire et écrire, de possèder des documents d'identification, d'avoir des garanties ou dejà un dépot minimum.

Les premières expérimentations remontent aux années 70 au Bangladesh à l'initiative de Muhammad Yunus, alors professeur d'économie à l'université de Chittagong. En 1974, il assista, impuissant, à une terrible famine dans le petit village de Joha proche de son université. Il interroge alors avec ses étudiants les artisans et paysans du village pour tenter de comprendre leurs besoins et recence une demande de petits prêts chez 42 femmes à qui il décide finalement de prèter lui-même une somme totale d'environ 27 Euros. Il met ensuite près de 10 années à tenter de convaincre les banques d'assumer ces prêts avant de décider finalement de fonder sa propre banque, la Grameen Banque, en 1983. Cette banque et lui-même reçurent le prix Nobel de la Paix en 2006. Actuellement l'activité de micro crédit s'est répandue dans la plupart des pays du monde, elle est assurée par près de 10 000 *Instituts de Micro Finance* (IMF) qui prètent 50 Milliards d'Euros à près de 500 Millions de bénéficiaires.

Les principales caratéristiques du microcrédit sont

- De très petits prêts consentis sur des périodes courtes (10 Euros sur une année) avec des remboursements fréquents (chaque semaine).
- Abscence complète de garantie individuelle
- Souvent il s'agit de *prêts groupés* c'est-à-dire consentis à un groupe d'emprunteurs (entre 5 et 30) qui reçoivent chacun un prêts mais sont solidaires en ce sens qu'ils doivent assumer tout ou partie de la défaillance (on dit le "défaut") d'un membre du groupe.
- Les bénéficiaires sont le plus souvent des femmes.
- Les taux d'intérêt pratiqués sont élévés, de l'ordre de 20%, pouvant parfois aller jusqu'à 30%.
- Possibilité d'un nouveau prêt automatiquement accordé en cas de remboursements effectifs et dans les temps (méchanisme d'*incitation dynamique*).
- Taux de remboursement proches de 100%.

Exemple : L'exemple suivant est donné par Muhammad Yunus [1] :

Considérons un prêt de 1000 BDT [2], d'une durée d'un an et supposons que les remboursements demandés s'élèvent à 22 BDT par semaine. Si l'on note r le taux continu annuel pratiqué, les 22 BDT remboursés après une semaine ont pour valeur présente $22e^{\frac{-r}{52}}$ et ceux que l'on rembourse la semaine suivante $22e^{\frac{-2r}{52}}$ ....et ainsi de suite. On aura donc, en posant $q = e^{-\frac{r}{52}}$, l'équation suivante pour q :

$$1000 = 22\sum_{k=1}^{50} q^k = 22\frac{q - q^{51}}{1 - q}.$$

La résolution de cette équation conduit à la solution $q \simeq 0.996$ et donc à un taux d'intérêt $r \simeq 19,74$ presque égal à 20%.

3 Obligations et taux actuariel

A coté des actions et de leurs produits dérivés, il existe sur les marchés à la disposition des investisseurs une autre grande famille d'actifs financiers liés aux taux d'interêt dont les plus simples sont les *obligations.*

Les obligations sont des contrats qui assurent à leur détenteur à la signature du contrat un flux connu de revenus, composé du *principal* versé à terme et d'une succession de *coupons* versés à des dates intermédiaires. On évalue facilement leur prix à l'instant initial $t = 0$ si l'on connait le taux d'intérêt (supposé constant pour simplifier). Par exemple une obligation d'état qui rapporte 1000 Euros dans 5 ans et 3% (soit 30 Euros) tous les 6 mois pourrait s'évaluer, si le taux d'intérêt annuel ρ était constant sur la période, comme

$$\frac{30}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}} + \frac{30}{(1+\rho)} + \frac{30}{(1+\rho)^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{30}{(1+\rho)^{\frac{9}{2}}} + \frac{1000}{(1+\rho)^5}$$

ou, en utilisant le taux continu r :

$$30e^{-\frac{1}{2}r} + 30e^{-r} + 30e^{-\frac{3}{2}r} + \ldots + 30e^{-\frac{9}{2}r} + 1000e^{-\frac{5}{2}r}.$$

1. Le livre de Muhammad Yunus *Vers un monde sans pauvreté*, Editions JC Lattès (1997), està présent disponible en Livre de Poche.
2. 100 Bangladesh Taka (BDT) vaut environs 1 Euros.

De façon plus générale, une obligation de principal P, d'échéance T et versant les coupons c_i aux dates t_i, $0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_k = T_{\max}$, aurait, pour un taux d'intérêt ρ, comme valeur à l'instant $t = 0$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+\rho)^{t_i}} + \frac{P}{(1+\rho)^{T_{\max}}}. \tag{1}$$

En pratique, l'évaluation des obligations va se faire en utilisant un taux variable déterminé à partir des prix observés à travers la notion de zéro-coupons, que nous définissons à présent.

Définition : Un *zero-coupon* de maturité T est un titre qui rapporte 1 Euros à une date future T fixée. Sa valeur à tout instant $t \in [0, T]$ (la durée restante (ou *maturité*) étant $\theta := T - t$) se note $Z(t, T)$, ou encore Z_t^T et on a donc toujours $Z(T, T) = 1$.

Le zéro-coupon est un actif *théorique* que l'on introduit notamment comme référence pour calculer le prix des obligations. En effet, toute obligation de principal P, d'échéance T et versant aux dates t_i les coupons c_i peut s'écrire, pour tout $t \leq T$, comme une simple combinaison linéaire de zéro-coupons

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i Z(t, t_i) + P Z(t, T).$$

Comme les zéro-coupons ne sont pas des actifs effectivement disponibles sur le marché, les praticiens sont conduits à reconstituer, à chaque date t, les valeurs $Z(t, T)$ pour toutes les valeurs $t < T < T_{\max}$ à partir des prix observées à cette date t des obligations disponibles sur le marché. Dans un marché liquide où l'on dispose des prix d'un nombre suffisant d'obligations dont les dates de versements sont identiques (ou compatibles), c'est simplement un problème de résolution d'un système linéaire. S'il y a trop peu de prix observés, on utilise ceux dont on dispose et on complète la fonction $T \to Z(t, T)$ par diverses méthodes d'interpolation. Notons cependant que si, à toute date t, les valeurs des zéro-coupons $Z(t, T)$ peuvent en principe être calculées à partir des prix observés à cette date, et donc sont considérées comme connues à cette date, les valeurs $Z(t+\delta t, T)$ des zéro-coupons à la date suivante $t+\delta t$ et de façon générale les valeurs des zéro-coupons à une date future quelconque, sont parfaitement inconnues. Or ces valeurs peuvent varier considérablement. D'où l'utilité d'une modélisation stochastique que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

Proposition 1 (La relation de refinancement (Rollover)) *Soient $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ trois instants consécutifs. Supposons connues les valeurs de $Z(t_1, t_2)$, $Z(t_2, t_3)$, et $Z(t_1, t_3)$. Alors nécessairement*

$$Z(t_1, t_2) Z(t_2, t_3) = Z(t_1, t_3). \tag{2}$$

Preuve : $Z(t_2, t_3)$ est le nombre d'euro qu'il faut détenir à la date t_2 pour pouvoir s'assurer d'avoir 1 euro à la date t_3. Or la la date t_1 le prix d'un euro à la date t_2 est $Z(t_1, t_2)$. Donc $Z(t_1, t_2)Z(t_2, t_3)$ est le prix à payer à la date t_1 pour s'assurer à la date t_2 du nombre nécessaire d'euro pour s'assurer 1 euro à la date t_3 : c'est précisément la définition de $Z(t_1, t_3)$. □

Remarque : L'hypothèse de cette proposition n'est guère réaliste : à la date t_1 les prix $Z(t_1, t_2)$ et $Z(t_1, t_3)$ sont connus, mais un changement des taux d'intérêts peut intervenir entre t_1 et t_2, lorsque $Z(t_2, t_3)$ sera connu. Nous devrons donc modifier cette relation de refinancement lorsque nous étudierons la notion de taux d'intérêts aléatoires.

Une bonne manière de comparer deux obligations est de comparer leurs *taux actuariels :*

Définition : Le taux actuariel est le taux (supposé constant) qu'il faudrait utiliser dans la formule (1) pour obtenir le prix observé noté P_0. En d'autres termes, le taux actuariel ρ d'une obligation, et son taux actuariel continu r sont définis implicitement par

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+\rho)^{t_i}} + \frac{P}{(1+\rho)^{T}} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i e^{-r t_i} + P e^{-rT} = P_0 \tag{3}$$

où P_0 est le prix de marché.

Il est utile de remarquer, pour avoir une bonne intuition, que le taux actuariel d'une obligation augmente lorsque son prix diminue et qu'il diminue lorsque son prix augmente. A noter aussi que le taux actuariel est le seul moyen de comparer les prix de deux obligations qui n'ont pas la même structure (pas les mêmes montants de coupons et de principal et/ou pas les mêmes dates de versements).

4 Courbes de taux et structure par terme

A coté du zéro-coupon $Z(t,T)$, que nous avons défini comme le prix en t d'un Euro délivré en T, il y a d'autres façons de représenter les taux d'intérêt que nous allons détailler ici. On utilise par exemple le *taux zéro-coupons*, plus souvent appelé le *rendement à maturité* (Yield to maturity), qui est la fonction $(t,T) \mapsto Y(t,T)$ définie par $Z(t,T) = e^{-Y(t,T)(T-t)}$. Si l'on applique la formule (3) pour exprimer le prix d'un zéro-coupon $Z(t,T)$ en choisissant t pour instant initial, on obtient $e^{-Y(t,T)(T-t)} = Z(t,T) = 1 \cdot e^{-r_{t,T}(T-t)}$, où $r_{t,T}$ désigne le taux actuariel sur la période $[t,T]$. En d'autres termes, $Y(t,T) = r_{t,T}$ est le taux actuariel sur la période $[t,T]$. Cette remarque prend toute son importance lorsque les taux actuariels sur une période future sont aléatoires. Dans ce cas on comprend que le taux zéro-coupons $Y(t,T)$ est un équivalent stochastique du taux actuariel.

Définition : Pour chaque valeur de t, le graphe de la fonction $T \mapsto Y(t,T)$ s'appelle la *courbe de taux à* l'instant t. Elle donne à un instant t fixé l'ensemble des taux pratiqués à cet instant pour des prêts de maturité δt, $2\delta t$, ... en fonction de cette maturité. L'ensemble des courbes de taux pour les différentes valeurs de t s'appelle la *structure par terme* des taux.

La connaissance de la courbe des taux $T \to Y(t,T)$ (qui est équivalente à la connaissance des prix des zéros coupons) est importante puisqu'elle permet d'exprimer le prix de n'importe quelle obligation. Comme nous l'avons souligné, les valeurs à l'instant initial $t = 0$ peuvent être déduites des prix observés sur le marché. Pour $t > 0$ par contre, elle est inconnue et peut être considérée comme une *courbe aléatoire* (v.a. à valeurs dans un ensemble de fonctions). On comprend que pour modéliser les taux, il faut modéliser la dynamique de ces courbes de taux et pas seulement la dynamique d'un prix comme dans le modèle Cos-Ross-Rubinstein, ce qui explique que ce soit plus complexe.

Une autre quantité, le *taux forward instantané*, noté $f(t,T)$ remplace aussi parfois $Z(t,T)$ ou $Y(t,T)$. Ce taux est défini implicitement à partir des zéro-coupons par la formule

$$Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}.$$

Une dernière quantité, importante, est le *taux court* ou *taux instantané*, r_t. C'est le taux que les professionels utilisent pour les règlements de dettes ou d'avoirs entre eux d'un jour sur l'autre (taux au jour-le-jour, ou taux à *un jour*, ou *jj*). Cette quantité aléatoire représente le coût de l'argent d'un jour sur l'autre. On supposera que r_t désigne le taux d'actualisation entre les dates $t - \delta t$ et t, et donc $r_t = Z(t - \delta t, t)$ et $r_t \in \mathcal{F}_{t-\delta t}$. Si l'on connaît les prix des zéro-coupons, on peut donc en déduire les valeurs de r_t. L'inverse n'est cependant pas vrai.

Du point de vue mathématique, ce sont les r_t que l'on utilise dans les modèles financiers où le taux d'intérêt sont supposés stochastiques, pour calculer l'actualisation. Ainsi, si X_t est le prix en t d'un actif, et $\tilde{X}_t$ son prix actualisé en $t = 0$, on aura $\tilde{X}_t = X_t/B_t$ où $B_t = (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t)$, pour le choix $B_0 = 1$. L'actualisation peut donc aussi s'écrire en fonction des zéro-coupons :

$$\frac{1}{B_t} = \frac{1}{1 + r_{\delta t}} \frac{1}{1 + r_{2\delta t}} \cdots \frac{1}{1 + r_t} = Z(0, \delta t) Z(\delta t, 2\delta t) \dots Z(t - \delta t, t).$$

On peut voir B_t comme la valeur aléatoire d'une compte d'épargne ayant un dépot initial de 1 Euros et rapportant des intérêts sur la base du taux-court observé au jour le jour.