

Feuille-réponses du TD 12
Modèle de Tedeschi avec période d'exclusion

Exercice 1. : modèle de Tedeschi, avec unique risque On considère un modèle de Tedeschi simplifié, avec T temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B . On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité α de rembourser son prêt : dans cas contraire il est exclu pour T périodes.

1. Notons $\mathcal{E} = \{B^+, B^-, E_{T-1}, \dots, E_k, \dots, E_2, E_1, D\}$ et $\mathcal{E}' = \{B, E'_T, \dots, E'_k, \dots, E'_2, E'_1\}$ Il vous est donné ci-dessous un arbre indiquant, de gauche à droite, les transitions d'état de probabilité de passage non nulle des états \mathcal{E} aux états \mathcal{E}' et à nouveau aux états \mathcal{E} . Que représentent les segment doubles? Indiquer les probabilités des autres transitions représentées par les flèches du diagramme à gauche et compléter le diagramme de Markov correspondant des états \mathcal{E} , dans le cas $T = 2$. Refaire le diagramme de Markov pour les états \mathcal{E}' .

2. Toujours pour $T = 2$ refaire le diagramme de la chaîne de Markov à quatre états $\{B^+, B^-, E_1, D\}$ correspondant à ce modèle dans la présentation ci-dessous. Ecrire la matrice de *passage* P (ou de *transition*) de cette chaîne.

3. Vérifier que $(\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$ est un vecteur propre¹ à gauche de cette matrice. En déduire la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne de Markov.

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, P^n tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π^* . Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$; calculer π^* et P^{50} .

2.- On distingue à présent à nouveau deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour T périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β .

1. On choisit à nouveau $T = 2$ Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov à six états $\{B_S^+, B_S^-, E_0, E_1, B_R^-, B_R^+\}$ correspondant à ce modèle ; en vous inspirant du diagramme de l'exercice 1.2 adopter une disposition symétrique des S et R par rapport à un axe pourtant les E .

1. On obtient facilement un tel vecteur propre par la commande suivante de **Maple** :

```
with(linalg);
P := matrix(4,4, [alpha,1-alpha,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,alpha*gamma,(1-alpha)*gamma,0,1-gamma]);
vcps:=eigenvectors(transpose(P));
```

à noter que **eigenvectors** fournit les vecteurs propres à droite ; il suffit donc de considérer la matrice transposée pour trouver les vecteurs propres à gauche, puisque ${}^t(\pi P) = {}^t P^t \pi$.

2. Ecrire la matrice de passage Q de cette chaîne.

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ et $\gamma = 0.3$; calculer Q^{50} . La matrice Q est-elle primitive? Donner sa première colonne; qu'observez-vous? Quelle est la distribution d'équilibre π^* de cette chaîne.