

**Feuille-réponses du TD 12**  
**Modèle de Tedeschi avec période d'exclusion**

**Exercice 1. : modèle de Tedeschi, avec unique risque** On considère un modèle de Tedeschi simplifié, avec  $T$  temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour  $T$  périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité  $\gamma$  de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire  $B$ . On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité  $\alpha$  de rembourser son prêt : dans cas contraire il est exclu pour  $T$  périodes.

1. Notons  $\mathcal{E} = \{B^+, B^-, E_{T-1}, \dots, E_k, \dots, E_2, E_1, D\}$  et  $\mathcal{E}' = \{B, E'_T, \dots, E'_k, \dots, E'_2, E'_1\}$  Il vous est donné ci-dessous un arbre indiquant, de gauche à droite, les transitions d'état de probabilité de passage non nulle des états  $\mathcal{E}$  aux états  $\mathcal{E}'$  et à nouveau aux états  $\mathcal{E}$ . Que représentent les segment doubles? Indiquer les probabilités des autres transitions représentées par les flèches du diagramme à gauche et compléter le diagramme de Markov correspondant des états  $\mathcal{E}$ , dans le cas  $T = 2$ . Refaire le diagramme de Markov pour les états  $\mathcal{E}'$ .

2. Toujours pour  $T = 2$  refaire le diagramme de la chaîne de Markov à quatre états  $\{B^+, B^-, E_1, D\}$  correspondant à ce modèle dans la présentation ci-dessous. Ecrire la matrice de *passage*  $P$  (ou de *transition*) de cette chaîne.

3. Vérifier que  $(\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$  est un vecteur propre<sup>1</sup> à gauche de cette matrice. En déduire la distribution d'équilibre  $\pi^*$  de cette chaîne de Markov.

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales,  $P^n$  tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à  $\pi^*$ . Application numérique : choisir  $\alpha = 0.90$  et  $\gamma = 0.50$  ; calculer  $\pi^*$  et  $P^{50}$ .

2.- On distingue à présent à nouveau deux types de demandeurs : les sûrs  $S$  et les risqués  $R$  de probabilités de remboursement respectives égales à  $\alpha_S > \alpha_R$ . Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour  $T$  périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité  $\gamma$  de se voir attribuer un prêt. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée  $\beta$ .

1. On choisit à nouveau  $T = 2$  Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov à six états  $\{B_S^+, B_S^-, E_0, E_1, B_R^-, B_R^+\}$  correspondant à ce modèle ; en vous inspirant du diagramme de l'exercice 1.2 adopter une disposition symétrique des  $S$  et  $R$  par rapport à un axe pourtant les  $E$ .

---

1. On obtient facilement un tel vecteur propre par la commande suivante de **Maple** :

```
with(linalg);
P := matrix(4,4, [alpha,1-alpha,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,alpha*gamma,(1-alpha)*gamma,0,1-gamma]);
vcps:=eigenvectors(transpose(P));
```

à noter que **eigenvectors** fournit les vecteurs propres à droite ; il suffit donc de considérer la matrice transposée pour trouver les vecteurs propres à gauche, puisque  ${}^t(\pi P) = {}^t P^t \pi$ .

2. Ecrire la matrice de passage  $Q$  de cette chaîne.

3. Application numérique :  $\alpha_S = 0.92$ ,  $\alpha_R = 0.88$ ,  $\beta = 0.50$  et  $\gamma = 0.3$ ; calculer  $Q^{50}$ . La matrice  $Q$  est-elle primitive? Donner sa première colonne; qu'observez-vous? Quelle est la distribution d'équilibre  $\pi^*$  de cette chaîne.