Table des matières

Introduction

L'activité de microcrédit consiste en l'attribution des prêts de faible montant à des emprunteurs, surtout des artisans, qui ne peuvent pas accèder aux prêts bancaires classiques. La révolution du microcrédit est apparu en 1976 grâce à la création de la Grameen Bank, en Bengladesh, par le professeur Muhammad Yunus (Prix Nobel de la paix).

Malgré son développement dans les trente dernières années, l'activité de microcrédit a été encore peu étudiée sous une base mathématique, contrairement à la théorie développée des mathématiques financières. On propose ici une première étape de modélisation d'une procédure de prêt basant sur l'interaction répétée entre le prêteur et l'emprunteur, également connue : *incitation dynamique*.

Dans un premier temps, et en basant sur la méthode de prêt étudiée par l'économiste G. A. Tedeschi (voir [19]), on construit un modèle de prêt individuel en utilisant l'esprit des prêt successif comme une *incitation dynamique*. Dans ce modèle, l'emprunteur est seul responsable du remboursement de son prêt.

La seconde partie consiste à présenter la technologie de prêt groupé où les emprunteurs se mettent en groupe et ils se partagent la responsabilité de remboursement. Cette technologie est introduite comme une solution aux problèmes d'asymétrie d'informantion, tels que la *selection adverse* et l'*aléa morale*, qui menacent l'activité de microcrédit. Donc, on introduit un modèle qui décrit une méthode de prêt en groupe. Ce modèle représente une généralisation du modèl de prêt individuel, au sens qu'il utilise la dynamique de prêt successif, et en plus il utilise le fait que les emprunteurs sont responsables pour les prêts les uns des autres.

Cette thèse comporte quatre chapitres qui présentent nos travaux.

Le premier chapitre que l'on peut qualifier comme une introduction économique pour le microcrédit, présente l'évolution de l'activité de microcrédit durant les trente dernières années. Encore, il présente quelques problèmes d'asymétrie d'information qui menacent l'application d'une telle activité, tels que la *selection adverse* et l'*aléa morale*. On cite encore comment plusieurs économistes, Ghatak [8], Stiglitz [18], Besley et Coate [4], Ahlin et Townsen [1], et autres, ont montré que la technologie de prêt groupé sous clause de responsabilité collective peut résoudre ces problèmes d'asymétrie d'information.

Le second chapitre présente des outils mathématiques qui nous servent à modéliser quelques méthodes de prêt en microcrédit. Ce chapitre contient deux parties principales. La première partie présente quelques propriétés de la théorie de chaine de Markov dont les principales références, qu'on a utilisé, sont Çinlar [5] et Flipo [7]. Tandis que la deuxième partie présente quelques rappels sur la théorie d'optimisation sous contraintes, dont les références principales sont Haftka et Gurdal [12], et Hiriart-Urruty [13].

Le troisième chapitre traite de la modélisation d'une méthode de prêt sous responsabilité individuel en microcrédit. Cette méthode de prêt est centrée sur l'interaction répétée entre l'emprunteur et le prêteur. Elle consiste à renouveler le prêt pour un emprunteur remboursant son prêt à l'échéance de chaque période de prêt, et en revanche, à exclure (pour certains temps) de droit de nouveau prêt le défaillant. L'esprit du modèle présenté dans ce chapitre est pris du papier de Tedeschi [19] qui traite toutes les étapes futures d'un emprunteur participant à ce type d'activité.

Le quatrième chapitre présente un modèle de prêt groupé, où les emprunteurs se mettent en groupe et se partagent la responsabilité des prêts les uns des autres. Le modèle représente une extension du modèle de prêt individuel étudié au chapitre trois, mais en plus il prend en compte la responsabilité de coopération des membres de groupe.

Enfin, la conclusion qui clôt ce manuscrit, présente un résumé du travail ainsi qu'une vue prospective.

CHAPITRE 1

Analyse économique du microcrédit

1.1 Introduction

L'activité de microcrédit consiste généralement en l'attribution de prêts de faible montant à des entrepreneurs ou des artisans qui ne peuvent pas accéder aux prêts bancaires classiques. Le microcrédit se développe surtout dans les pays en développement et il fait aujourd'hui une partie des politiques économiques et sociales de nombreux pays.

La révolution du microcrédit a commencé en 1976 par la création de la Grameen Bank. Cette banque est spécialisée dans le microcrédit[1], en Bangladesh. La mise en place et le développement à grande échelle de ce système ont été récompensés par :

1. Le decret, par les nations unies, de l'année 2005 comme *année internationale du microcrédit*.
2. L'attribution du *prix Nobel de la paix*, en octobre 2006, conjointement au Bangladais Muhammad Yunus et à la banque qu'il a créée, la Grameen Bank.

Dans ce chapitre, on présente d'abord quelques problèmes liés à la présence d'asymétrie d'information qui menacent l'activité de microcrédit. Ensuite, et comme étudié par plusieurs chercheurs, on montre comment l'introduction d'une clause de responsabilité collective dans un contrat de prêt groupé peut permettre de résoudre ces problèmes.

1.2 Quelques problèmes d'asymétrie d'information en microcrédit

En économie, on parle d'*asymétrie d'information* lors d'un échange quand certains des participants disposent d'informations pertinentes que d'autres n'ont pas. Par exemple, dans la pratique de l'activité de microcrédit, l'emprunteur est le seul à détenir certaines données : sa qualité, son comportement, le résultat de son investissement, etc..

Dans ce contexte, on présente deux problèmes principales d'*asymétrie d'information*, *ex ante* et *ex post*[2], lors d'une signature d'un contrat, liées à la présence d'*asymétrie d'information* :

1. *ex ante* : où l'emprunteur possède des informations qu'il ne fournit pas au prêteur avant le contrat de dette. Cette première forme d'asymétrie conduit au problème de la *sélec-*

[1]La Grameen Bank dispose de près de 1400 succursales et travaille dans plus de 50 000 villages. Depuis sa création, elle a déboursé plus de 4.69 millards de dollars de prêts et affiche des taux de remboursement de près de 99%. voir http ://fr.wikipedia.org/wiki/Grameen_Bank.

[2]Situations antérieur et postérieur d'une signature de contrat.

tion adverse, selon lequel il est difficile de distinguer les bons emprunteurs des mauvais emprunteurs[3].

2. *ex post* : où le prêteur court le risque d'une exécution partielle du contrat ou de sa non-exécution du fait des comportements opportunistes de l'emprunteur. Cette seconde forme d'asymétrie conduit à l'*aléa moral*.

Ces deux phénomènes bloquent parfois complètement l'accès des plus pauvres au crédit et, même lorsque ceux-ci peuvent emprunter, ces problèmes entraînent des taux d'intérêt plus élevés pour les pauvres que pour les riches. Le prêteur ne peut accepter de s'engager dans la relation de dette que s'il a les moyens de limiter cette *asymétrie d'information* et l'incertitude qui lui est liée : recherche d'information, surveillance, incitations diverses à l'exécution des contrats sont autant de moyens qui sont généralement mis en œuvre.

Dans la dernière section de ce chapitre, on présente comment les contrats de prêt groupé, comportant sous une clause de responsabilité collective au remboursement, présentent une solution pour se protéger contre ces problèmes d'*asymétrie d'information*.

1.2.1 Selection adverse

Dans le contexte de la *sélection adverse*, on introduit deux hypothèses principales. La première concernant l'entrepreneur où il connaît son propre niveau de risque, i.e. le risque individuel attaché à son projet, et celui des autres emprunteurs. Tandis que la deuxième est apporté au prêteur où il n'a pas la possibilité de discriminer entre les différents types d'emprunteurs[4].

Si le mécanisme de caution est applicable alors, pour se protéger de ce type d'*asymétrie d'information*, le prêteur a la possiblité d'offrir deux contrats, le premier avec un taux d'intérêt élevé et un caution bas tandis que le second a des caractéristiques inverses. L'emprunteur le plus risqué va choisir le premier contrat et le plus sûr va préférer le second [5]. Vue qu'un tel mécanisme de caution ne peut pas être appliqué dans les pays en développement, le prêteur va chercher un autre mécanisme pour obtenir les informantion manquante.

C'est dans ce contexte que le mécanisme de prêt groupé sous clause de responsabilité collective[6] au remboursement peut se révéler utile. En effet, en introduisant cette clause de responsabilité entre les emprunteurs d'un même groupe, le prêteur s'appuie sur l'information dont chaque emprunteur dispose sur les autres.

Ainsi, l'introduction d'une clause de responsabilité collective dans le contrat de prêt peut permettre à la fois l'augmentation du taux de remboursement des emprunts et de l'efficacité dans la répartition des prêts par le prêteurs en réduisant le risque de la *sélection adverse*.

[3]Selon les nivaux de riques de leurs projets, on classifie les emprunteurs suivant qu'ils sont des bons ou des mouvais emprunteurs.

[4]Ces deux hypothèses se justifient si l'on imagine un prêteur installé en ville et qui fait face à des demandes de prêts d'individus habitant le même village.

[5]Pour plus d'informations sur le mécanisme de caution voir le cours de Venet [20].

[6]On retrouve ainsi l'un des aspects de la technologie financière du secteur informel : l'utilisation des relations de voisinage comme condition sous-jacente du prêt.

1.2.2 Aléa moral

Après avoir obtenu un prêt, il se pose le problème du résultat d'investissemnt. Dans cet activité de microcrédit il n'y a pas de mécanisme de caution d'un crédit par lequel le prêteur peut convaincre un emprunteur à révéler soit l'état de la nature réalisé, soit son comportement à ne pas respecter ses engagements, soit ses activités sans mentir.

L'*aléa moral* (ou *hasard moral*) survient lorsque les états de la nature et les actions des emprunteurs ne sont pas observables par le prêteur dont le comportement de l'emprunteur en fait une partie, par exemple l'effort qu'il a déployé. Ce qui est observable c'est le réultat d'investissement, emprunteur est en succès s'il a remboursé et en echèc s'il a fait défaut. C'est donc une forme d'opportunisme, post-contractuel, qui survient lorsque les actions mises en œuvre ne peuvent être discernées. Par conséquent, il y a une relation d'arbitrage entre le partage des risques et les incitations. Le renouvellement de crédit en cas de succès et le refus par le prêteur de renouveler le contrat d'un client en cas de défaut de remboursement ou de l'echèc du projet peuvent influencer les incitations des emprunteurs à produire de la prévention dans la gestion du crédit.

1.3 Incitations dynamiques

Dans l'activité de microcrédit, comme pour les prêts bancaires classiques, l'effet de non remboursement menace la faillite du prêteur. Pour se potéger contre la faillite, les institutions de microfiance (IMF) cherchent des mécanismes qui incitent les emprunteurs à rembourser leur prêts.

Plusieurs recherches ont porté sur les incitations présentés sous les différents types de prêt, individuel et groupé. Besley (voir [3]) et Morduch (voir [16]) ont présenté la dynamique des interactions répétées entre l'emprunteur et le prêteur comme une mécanisme d'incitation. Ils ont montré que si l'emprunteur a des besoins de crédits continus, alors l'accès à des prêts futurs peuvent fournir une bonne raison pour éviter fair défaut sur un prêt en cours. Hulme et Mosley (voir [14]) et Jain et Mansouri (voir [15]) ont montré comment l'augmentation de la taille de prêt, ou les prêts progressifs, améliore les incitations au remboursement chez les emprunteurs.

L'assurance des incitations au remboursement par le biais de refinancement est modélisé par Hulme et Mosely [14], et Armendariz de Aghion et Morduch [2]. Dans leurs recherchers, ils ont constitué un modèle de deux périodes tel que le remboursement du premier prêt entraine un nouveau financement, pour un nouveau investissemenent. Dans ce type de prêt, les défauts de remboursement plutôt arrivent au second prêt. Tandis que, le modèle dynamique étudié par Tedeschi [19] prend en compte toutes les étapes futurs d'un emprunteur. Dans ce modèle, elle assume que, en tant que règle, chaque emprunteur qui rembourse son prêt aura automatiquement accès à un nouveau prêt. Et afin de renforcer l'emprunteur à rembourser quand le rendement de l'investissement le permet, le modèle introduit également une phase d'exclusion qui se produit en cas de non remboursement, où un défaillant n'a pas le droit d'avoir un nouveau prêt pour certains temps.

Dans la section d'après, on présente deux types de contrants appliqués en microcrédit, contrat individuel sous une responsablitié individuelle au remboursement, et contrat groupé sous une clause de responsabilité collective au remboursement.

1.4 Vers un contrat groupé avec responsabilité collective

1.4.1 Contrat individuel

Le principe de fonctionnement de contrat de prêt individuel qu'on présente ici est étudié par l'économiste G. A. Tedeschi (voir Tedeschi [19]) où chaque emprunteur est le seul responsable de son remboursement.

Dans ce modèle, le remboursement est une décision implicite de rester en règle avec le prêteur, qui préserve la possibilité de l'accès futur au crédit. En revanche, la décision de faire défaut permet à l'emprunteur de s'approprier la totalité du produit de prêt en cours, mais au prix de perdre l'accès futur (pour certains temps) au crédit. Le prêteur n'accepte pas de remboursement partiel. Un emprunteur individuel fait sa décision de remboursement ou de défaut, même lorsque les rendements de l'activité sont suffisants pour rembourser son prêt chargé du taux d'intérêt.

Ainsi, on suppose que le taux d'intérêt ainsi que le montant de prêt restent fixes pour tous les étapes futures. On suppose aussi que le but de prêteur est l'amélioration de l'état sociale des emprunteurs et ceci en fixant un contrat qui maximise leur profit.

La maximisation du profit de l'emprunteur doit respecter quelques contraintes, dont on cite les trois principales qu'on prend on compte dans notre étude :

1. L'emprunteur doit être satisfait du contrat, au sens que l'espérence de son revenu doit couvrir le prêt chargé de taux d'intérêt.
2. l'emprunteur doit avoir l'incitation au remboursement quand le revenu de son investissement le permet.
3. Le prêteur doit maintenir une opération durable de prêt et se protéger contre la faillite.

Dans le chapitre trois, on présente un modèle mathématique décrivant cette méthode de prêt individuel en microcrédit. Ce modèle est inspirée du papier de Tedeschi [19] qui prend en compte tout les états futurs d'un participant à ce type d'activité.

1.4.2 Contrat groupé sous clause de responsabilité collective

Afin de réjoindre les clientèles de microcrédit avec des contrats de prêts à conditions plus avantageuses que les contrats individuels, et de trouver des solutions aux problèmes d'*asymétrie d'information* présentés au-dessus, une autre technologie de prêt est ainsi dévéloppée, c'est le technique de contrat groupé. Ce technique consiste à prêter les emprunteurs en groupe où ils partagent la responsabilité de remboursement. Les membres du groupe sont responsables pour les prêts les uns des autres, ils ont mieux d'informations que le prêteur, de choisir des personnes qu'ils estiment les plus susceptibles à rembourser.

Les IMFs utilisent le groupe pour obtenir l'information qu'elles n'ont pas. Il en resulte qu'une partie de risque, par la délégation de la surveillance, va être pesée sur les membres du groupe. En effet chaque membre va prendre une partie du risque de ses partenaires sur lui à la place de l'IMF. Pour ne pas avoir à payer leur voisin, la délégation de la surveillance permet donc à l'IMF d'inciter les membres du groupe à réagir correctement.

Lorsqu'un groupe est formé[7], chaque membre a l'incitation à contrôler les comportements des autres en réduisant l'*aléa moral* et les coûts de surveillance du prêteur. Plusieurs recherches ont porté sur l'étude de contrat groupé sous la clause de responsabilité collective au remboursement. En terme de succès de ce type des contrats, Besley et Coate [4] montrent que les membres du groupe en succès peuvent être incités à rembourser les prêts pour ceux (du goupe) qui sont en difficultés. Ghatak [8] montre comment le problème de la *sélection adverse* peut être partiellement résolu par tel genre des contrats. Ghatak et Guinnane [9] et Stiglitz [18] analysent le problème d'*aléa moral* en cas de prêt groupé sous la clause de responsabilité conjointe. Ahlin et Townsen [1] ont étudié l'effet de prêt goupé sur le taux de remboursement. Ces modèles[8] montrent tous l'avantage du prêt groupé.

Dans le chapitre quatre, on présente un modèle mathématique décrivant une méthode de prêt en groupe sous la clause de responsablitié collective au remboursement. Il s'agit d'une extension du modèle de prêt individuel étudié dans le chapitre trois. Cette méthode de prêt groupé est basé sur l'incitation dynamique au remboursement qui consiste à renouveler automatiquement le prêt pour un emprunteur remboursant son prêt à l'échéance. En revanche cettei ncitation consiste à exclure de droit d'un nouveau prêt, pour certains temps, le défaillant. En cas de défaillance d'un membre du groupe, les autres membres vont réagir ensemble pour payer le montant de la responsabilité collective. Dans ce modèle, on voit comment la clause de responsabité collective au remboursement joue un rôle dans la détermintation de la durée de période d'exclusion en cas de défaillance d'un emprunteur.

[7]La manière de se former des groupes est un aspect important du succès de plusieurs IMF qui pratique le prêt groupé, par exemple Grameen Bank en Bengladesh et Boncosol en Bolivie, car les villageois ont un avantage informationnel par rapport à l'institution de crédit formelle.

[8]La réputation va jouer dans ces modèles un rôle essentiel lors de la formation des groupes face à l'IMF pour la négociation des termes du contrat de dette et pour l'obtention de prêt supplémentaire à la fin de celui en cours. La réputation va donc servir de mécanisme régulateur pour le groupe et pour l'IMF dans leur relation de long terme. En d'autres termes, ces modèles montrent la capacité du groupe à créer une "garantie sociale".

CHAPITRE 2

Outils mathématiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on fait un rappel de quelques outils mathématiques qui nous servent à présenter et à résoudre les modèles des toisième et quatrième chapitres de ce manuscrit.
En outre de l'introduction, ce chapitre est constitué de deux sections qui sont séparables et n'ont aucun lien entre eux mêmes. La première section présente quelques propriétés de la théorie de chaine de Markov[1], tandis que la deuxième présente une méthode de résolution d'un problème d'optimisation[2] avec contraintes d'inégalité.

2.2 Chaine de Markov

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1.1. Un processus stochastique $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ est une collection de variables alétoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités (Ω, F, P).

La variable X_t représente l'état du processus au temps t, et E, étant l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable, est appelée l'espace des états du processus.
Un processus stochastique dont l'ensemble des états E est fini ou dénombrable est appelé une chaine.

Définition 2.2.1.2. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique à temps discret, défini sur E fini ou dénombrable. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov si et seulement si

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, i_1, \ldots, i_{t-1}, i$ pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens.

La propriété de Markov exprime que, si la valeur de X_t est connue à l'instant t, la loi des variables futures (X_{t+1}, X_{t+2},etc.) ne dépend pas du passé (les valeurs de X_{t-1}, X_{t-2},etc.).

Définition 2.2.1.3. Une chaine de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, pour tout paire d'états (i, j) et tout instant t,

$$P[X_t = j \mid X_{t-1} = i] = P[X_{t+k} = j \mid X_{t+k-1} = i]$$

quel que soit $k \geq 0$.

[1] Les références principales concernant les chaine de Markov sont le livre de Çinlar [5] et les cours de Flipo [7].
[2] Pour référence, je cite ici Haftka et Gurdal [12] et Hiriart-Urruty [13].

Dans ce chapitre, ainsi que dans les chapitres suivants, l'étude portera sur une chaine de Markov à temps discret, définie sur un espace d'états fini, et homogène dans le temps.

2.2.2 Probabilité de transition et matrice de transition

Pour une chaine de Markov homogène $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$, on a

$$P[X_t = j \mid X_{t-1} = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i] \; \forall t \geq 1$$

Donc la probabilité de transition (en 1 étape) de i à j comme

$$p_{ij} = P[X_1 = j \mid X_0 = i] \; \forall (i, j) \in E^2$$

Les probabilités précédentes peuvent être rangées dans une matrice, appelée matrice de transition $P = (p_{ij})$ de taille $l \times l$, où l est la taille de E.

2.2.3 Probabilités de transition en k étapes

La probabilité conditionnelle d'aller de i à j en k étapes excatement est

$$p_{ij}^{(k)} = P[X_k = j \mid X_0 = i] = P[X_{k+t} = j \mid X_t = i] \; \forall t \geqslant 1$$

Cette probabilité est indépendante de t car le processus est homogène et est appelée probabilité de transition en k étapes de i à j.
La matrice $P^{(k)}$ dont l'élément (i, j) est égale à $p_{ij}^{(k)}$ est appelée la matrice de transition en k étapes, avec $P^1 = P$.

Théorème 2.2.3.1. *Pour tout $k \geq 0$, la probabilité $p_{ij}^{(k)}$ de transition en k étapes de i à j est donnée par l'élément (i, j) de la matrice P^k, ou encore $P^{(k)} = P^k$.*

2.2.4 Equation de Chapmann-Kolmogorov

Corollaire 2.2.4.1. *Soit $P^{(k)}$, $k \geqslant 0$, la matrice de transition en k étapes d'une chaine de Markov. Alors, pour tous entiers non négatifs n et l on a*

$$P^{(n+l)} = P^{(n)} P^{(l)}$$

où

$$p_{ij}^{(n+l)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(l)}, \; \forall i, j \in E.$$

2.2.5 Propriétés faible et forte de Markov

Théorème 2.2.5.1. ***Propriété faible de Markov***
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov, fixons $t \in \mathbb{N}$ et soit Y une fonction bornée de variables aléatoires X_t, $X_{t+1}, \ldots$, alors

$$\mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_t] = \mathbb{E}[Y \mid X_t]$$

Démonstration. Il est suffisant de prouver ce théorème pour un variable aléatoire Y comme fonction d'un nombre fini d'états[3], disons $Y = F(X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+k})$, pour $k \in \mathbb{N}$ et F est une fonction borné de E^{k+1} dans $\mathbb{R}$. Si $k = 0$ alors la démonstration est triviale[4]. Maintenant on suppose, par induction, que la propriété soit vraie pour toute fonction bornée de la forme
$F(X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+k})$, et on va démontrer qu'elle restera vrai pour tout fonction bornée de la forme
$Y = G(X_t, \ldots, X_{t+k}, X_{t+k+1})$.
D'un part, par la propriété d'espérance conditionnelle[5] on a :

$$\mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_{t+k}] \mid X_0, \ldots, X_t]. \tag{2.2.1}$$

d'autre part, en utilisant la propriété de Markov au temps $t + k$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_{t+k}] &= \sum_{j\in E} G(X_t, \ldots, X_{t+k}, j) P\{X_{t+k+1} = j \mid X_0, \ldots, X_{t+k}\} \\ &= \sum_{j\in E} G(X_t, \ldots, X_{t+k}, j) P(X_{t+k}, j) \\ &= H(X_t, \ldots, X_{t+k}) \end{aligned}$$

pour une fonction H. La dernière expression étant une fonction dépendant seulement des variables $X_t, \ldots, X_{t+k}$, alors on applique l'hypothèse de recurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_{t+k}] \mid X_0, \ldots, X_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X_0, \ldots, X_{t+k}] \mid X_t] \\ &= \mathbb{E}[Y \mid X_t] \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.5.2. *Pour tout $t \in \mathbb{N}$ et toute fonction bornée F sur $E \times E \times \ldots$, on a*

$$\mathbb{E}[F(X_t, X_{t+1}, \ldots) \mid X_t = i] = \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = i]$$

Corollaire 2.2.5.3. *Soit F une fonction bornée sur $E \times E \times \ldots$, et soit*
$G(i) = \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = i]$. Alors pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[F(X_t, X_{t+1}, \ldots) \mid X_0, \ldots, X_t] = G(X_t)$$

[3] Voir Çinlar [5]
[4] si $Y = F(X_1, \ldots, X_t)$ alors $\mathbb{E}[Y \mid X_1, \ldots, X_t] = Y$.
[5] si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux tribus tel que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{H}]$.

Dans l'énoncé général de la propriété de Markov faible, l'instant "présent ", t, peut-être remplacé par un instant "présent" aléatoire, τ, pourvu que τ soit un temps d'arrêt. Cela peut s'interpréter comme une forme d'indépendance (une indépendance conditionnelle) entre le passé et le futur.

Théorème 2.2.5.4. ***Propriété forte de Markov***
Pour tout temps d'arrêt τ,

$$\mathbb{E}[F(X_\tau, X_{\tau+1}, \dots) \mid X_t; t \leqslant \tau] = \mathbb{E}[F(X_\tau, X_{\tau+1}, \dots) \mid X_\tau]$$

ceci pour toute fonction bornée F sur $E \times E \times \dots$.

Démonstration. Pour la démonstration voir Çinlar [5]. □

2.2.6 Distribution initiale et comportement

Distribution initiale

La distribution des états d'une chaine de Markov après t transitions est notée $\pi^{(t)}$. Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable aléatoire X_t

$$\pi_i^{(t)} = P[X_t = i],\ \forall i \in E$$

avec $\pi^{(0)}$ est la distribution initiale.

Comportement transitoire

Théorème 2.2.6.1. *Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov et $\pi^{(0)}$ la distribution de son état initial. Pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P \textit{ et } \pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^n$$

Démonstration. Premièrement, on a , pour tout $j \in E$,

$$\begin{aligned}
\pi_j^{(1)} &= P[X_1 = j] \\
&= \sum_{i \in E} P[X_1 = j \mid X_0 = i] P[X_0 = i] \\
&= \sum_{i \in E} p_{ij} \pi_i^{(0)} \\
&= \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}
\end{aligned}$$

et $\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P$.
La chaine étant homogène, on obtient immédiatement le premier résultat
$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P, \forall n \geqslant 1$.
Pour démontrer le second il suffit de résoudre l'équation de récurrence précédente par substitution. □

Comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaine de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que

- la distribution $\pi^{(n)}$ converge-t-elle, lorsque $n \to \infty$?
- si la distribution $\pi^{(n)}$ converge lorsque $n \to \infty$, quelle est la limite π^* et cette limite est-elle indépendante de la distribution initial $\pi^{(0)}$?

Définition 2.2.6.2. Une distribution π est dite invariante ou stationnaire si $\pi = \pi P$.

Propriété 2.2.6.3. *Si $lim_{n\to\infty}\pi^{(n)}$ existe, alors la limite est une distribution invariante.*

Les états i et j communiquent s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre. La relation "i et j communiquent" est une relation d'équivalence dont les classes correspondent aux composantes fortement connexes de la graphe de matrice de transition (chaque matrice de transition peut être représentée par un graphe).

Définition 2.2.6.4. Une chaine de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe. Dans le cas contraire, elle est réductible.

Définition 2.2.6.5. La période d'un état récurrent $i \in E$ est le pgcd de l'ensemble L_i défini par

$$L_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Proposition 2.2.6.6. *Supposons la chaine récurrente irréductible.*

1. *Tous les points ont la même période, appelée la période de la chaine.*
2. *Si la période vaut 1 (la chaine est alors dite apériodique), pour tour $i, j \in E$, il existe un entier n_0 tel que $p_{ij}^{(n)}$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Le corrollaire suivant nous sera utile par la suite.

Corollaire 2.2.6.7. *Supposons E est fini. Alors la chaine est irréductible apériodique si et seulement s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que pour tous $x, y \in E$, $P^k(x, y) > 0$. Dans ces conditions, on dit que la matrice de transition P est primitive.*

Théorème 2.2.6.8. *Soit P la matrice de transition d'une chaine irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- *La matrice $P^{(n)}$ tend vers une matrice stochastique P^* lorsque n tend vers l'infini.*
- *Les lignes de P^* sont toutes égales entre elles.*
- *$P_{ij}^* > 0$ pout tout $i, j \in E$.*
- *Pour toute distribution initiale $\pi^{(0)}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*.$$

- *π^* est la solution unique du système*

$$\begin{cases} \pi P &= \pi \\ |\pi| &= 1 \end{cases}$$

– *π^* est égal à n'importe quelle ligne de la matrice P^*.*
– *Pour tout $i \in E$, $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$*
  où μ_i est l'éspérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.

Remarque 2.2.6.9. Pour n suffisamment grand, on a $\pi^{(n)} \backsimeq \pi^*$ et π_i^* est la probabilité que la chaine se trouve dans l'état i à un instant quelconque. Cette valeur représente aussi la proportion du temps passé dans l'état i.

Exemple 2.2.6.10. Soit la chaine de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Cette chaine est irréductible et apériodique. L'unique solution de système

$$\begin{cases} \pi P & = & \pi \\ |\pi| & = & 1 \end{cases}$$

est π^*=(1/4 3/10 9/20)
Le processus passe donc, en moyenne, **30**$\%$ du temps dans l'état **2** et il faut, en moyenne, **4** transitions entre deux visites successives de l'état **1**.

2.3 Optimisation

2.3.1 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inégalité

On considère maintenant le problème d'optimisation $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} Max\ f(x) \\ s.c.\ x \in C \end{cases}$$

où $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des contraintes C est décrit par m inégalités

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0\}$$

où les m fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont supposées différentiables sur $\mathbb{R}^n$.
Si $x^* \in \mathcal{O}$, candidat à être maximum de f, est à l'intérieur de C, on sait qu'elle doit vérifier "$\nabla f(x^*) = 0''$; si cet x^* se trouve sur la frontière de C, alors interviendront nécessairement les fonctions g_i définissant les contraintes, ou du moins certaines d'entre elles. Pour $x^* \in C$, posons

$$I(x^*) := \{i \mid g_i(x^*) = 0\};$$

on appelle les $i \in I(x^*)$ les indices des contraintes actives ou saturées en x^*. Pourquoi cela ? Si $i \notin I(x^*)$, c'est-à-dire si $g_i(x^*) < 0$, la contrainte inégalité $g_i(x^*) \leq 0$ ne joue localement aucun rôle : en effet, $g_i(x) < 0$ pour x dans un voisinage de x^*. Si $i \in I(x^*)$, il est probable que x^* est à la frontière de C et que l'on sort nécessairement de C en bougeant un petit peu autour de x^*. Il s'avère donc que seules les fonctions g_i correspondant aux indices de $I(x^*)$ interviendront dans les conditions nécessairement vérifiées par un minimum local x^* de f.

2.3.2 Conditions de qualification de contraintes

Pour pouvoir utiliser le Lagrangien dans la résolution d'une problème d'optimisation sous m contraintes d'inégalités, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- Soit $s \leqslant m$ le nombre de contraintes saturées à l'optimum x^*. On suppose sans perdre de généralité qu'il s'agit des s premières contraintes g_i, $i = 1, \cdots, s$. Si la matrice Jacobienne de ces fonctions contraintes, notée J_G et de taille (s, n), est de rang s lorsqu'elle évaluée à l'optimum x^*, alors la condition des cotraintes est vérifiée.
- Les fonctions contraintes g_i, $i = 1, \cdots, s$ sont toutes linéaires.

2.3.3 Conditions du premier ordre (Kuhn et Tucker)

on suppose que la contrainte de qualification est vérifiée, donc on définit le Lagrangien comme la fonction $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \Sigma_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

où les variables λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte i et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$. La condition suivante, appelée condition de Kuhn et Tucker, généralise la condition de Lagrange[6] :

Théorème 2.3.3.1. *Si x^* est une solution du problème de maximisation $(\mathcal{P})$; alors il existe un unique vecteur $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_m^*)$ tel que les $n+3m$ conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(x^*, \lambda^*) = 0 & \forall j = 1, \cdots, n \\ g_i(x^*) \leq 0 & \forall i = 1, \cdots, m \\ \lambda_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \cdots, m \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 & \forall i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

La condition de Lagrange, Khun et Tucker est une condition nécéssaire, mais elle n'est généralement pas suffisante.

En pratique, la résolution des conditions de Kuhn et Tucker est compliquée par le fait qu'il faut envisager successivement toutes les configurations possible : toutes les contraintes sont saturées à l'équilibre, toutes sauf une, deux, . . ., aucune (tous les λ_i sont nuls à l'équilibre). Pour trouver la bonne solution, il faut procéder par élimination, en montrant que parmi l'ensemble de ces possibilités, certaines aboutissent à des contradictions.

Remarque 2.3.3.2. Notons, qu'il est trés facile de passer d'un problème de minimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations à un problème de maximisation.

[6]Voir Haftka and Gurdal [12].

Soit $(\mathcal{P}')$ le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}')\left\{\begin{array}{l} Min\ f(x) \\ s.c.\ g_i(x) \geq 0\ \forall i = 1,\ldots,m \end{array}\right.$$

Pour pouvoir appliquer les conditions de Khun et Tucker évoquées ci-dessus, il suffit de transformer le problème de minimisation $(\mathcal{P}')$ en un problème de maximisation $(\mathcal{P}'')$ suivant :

$$(\mathcal{P}'')\left\{\begin{array}{l} Max\ -f(x) \\ s.c.\ -g_i(x) \leqslant 0\ \forall i = 1,\ldots,m \end{array}\right.$$

Exemple 2.3.3.3. Résoudre le problème de maximisation $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l} Min\ [-(x-4)^2 - (y-4)^2] \\ s.c.\ \begin{array}{rcl} x+y-4 & \leqslant & 0 \\ x+3y-9 & \leqslant & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

Solution : Le lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$\mathcal{L} = -(x-4)^2 - (y-4)^2 - \lambda_1(x+y-4) - \lambda_2(x+3y-9)$$

Condition de qualification des contraintes : Toutes les contraintes étant linéaires, la contrainte de qualification est automatiquement vérifiée.

Si $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$, alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2(x^*-4) - \lambda_1^* - \lambda_2^* & = & 0 \\ -2(y^*-4) - \lambda_1^* - 3\lambda_2^* & = & 0 \\ \lambda_1^*(x^*+y^*-4) & = & 0 \\ \lambda_2^*(x^*+3y^*-9) & = & 0 \\ \lambda_1^*,\ \lambda_2^* & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Les deux premières équations sont $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$ respectivement.

Pour détérminer les solutions de ce système, il faut envisager successivement tous les cas de figure possibles portant sur la saturation des contraintes et procéder par élimination :

- **Cas 1** : Les deux contraintes sont saturées à l'optimum, ($x^*+y^*-4 = 0$, et $x^*+3y^*-9 = 0$). Après résolution, on obtient $\lambda_2^* = -1$, Ce qui viole la condition $\lambda_2^* \geqslant 0$.
- **Cas 2** : Seule la première contrainte est saturée à l'optimum, ($x^* + y^* - 4 = 0$, et $x^* + 3y^* - 9 < 0$), donc $\lambda_2^* = 0$. Par résolution du système, on obtient que toutes les conditions sont satisfaites pour la solution $(2, 2, 4, 0)$.
- **Cas 3** : Seule la deuxième contrainte est saturée à l'optimum, ($x^* + y^* - 4 < 0$, et $x^* + 3y^* - 9 = 0$), donc $\lambda_1^* = 0$. Dans ce cas, on obtient la soltuion $x^* = 12/5$ et $y^* = 12/5$, ce qui viole la condition $x^* + y^* < 4$.
- **Cas 4** : Aucune de deux contraintes n'est saturée à l'optimum, ($x^* + y^* - 4 < 0$, et $x^* + 3y^* - 9 < 0$), donc $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$. La résolution du système, dans ce cas, donne $x^* = y^* = 4$, ce qui contradit la condition $x^* + y^* < 4$.

Notons que la fonction f est concave et les deux contraintes sont linéaires. Par conséquent, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (2, 2, 4, 0)$ est un maximum global du problème d'optimsation $(\mathcal{P})$.

CHAPITRE 3
Modèle de prêt individuel

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter un modèle mathématique décrivant une méthode de prêt individuel en microcrédit. Cette méthode de prêt est centrée sur l'interaction répétée entre l'emprunteur et le prêteur, également connue sous le nom : *incitation dynamique*. Besley [3] et Morduch [16] ont montré que lorsque l'emprunteur a besoin de crédits continus, l'accès à des nouveaux prêts peut fournir une bonne raison pour éviter l'emprunteur à faire défaut sur un prêt en cours. Encore, l'augmentation de la taille de prêt améliore l'incitation chez l'emprunteur à rembourser comme montré par Hulme et Mosley [14], et Jain et Mansuri [15]. En pratique, les IMFs prévoient qu'un emprunteur en défaut (de remboursement) sera inadmissible à des prêts futurs.

Plusieurs économistes ont modélisé la stratégie qui assure l'incitation au repayement par le refinancement, on cite ici Hulme et Mosley [14], Armendariz de Aghion et Morduch [2], et Ghosh et Van Tassel [10]. Dans leurs études, ces auteurs n'ont construit que des modèles de deux périodes, tandis que Tedeschi [19] a adapté la dynamique à deux étapes de Green et Porter [11] pour construire un modèle qui prend en compte toutes les étapes futures.

Notre modèle, qui est une généralisation du modèle de Tedeschi, prend en compte toutes les étapes futures où le prêteur et l'emprunteur maintiennent une activité qui durent pour plusieurs (possibilité d'avoir un nombre infini) périodes. Le modèle consiste à renouveler automatiquement le prêt, en gardant la même taille, pour les emprunteurs en cas de remboursement et à interdire d'accéder à des crédits ultérieurs, pour quelques périodes, les emprunteurs en cas de défaillance. D'abord, par une chaine de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeur dans un espace d'état fini E, on modélise les états d'un participant. Ensuite, on calcule le revenu intertemporel espéré d'un individu qui participe à ce type d'activité. En plus, on calcule, à l'équilibre, la distribution de la population suivant les différents états. Finalement et par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes (deux contraintes principales qui assurent la durabilité de l'activité de prêt), on calcule un contrat optimal (r^*, T^*) qui maximise le profit de l'emprunteur, où r^* représente le taux d'intérêt et T^* représente la durée de la phase d'exclusion en cas de défaillance d'un emprunteur.

3.2 Modèle de prêt individuel

Le modèle de microcrédit qu'on représente dans ce chapitre est une généralisation de la méthode de prêt étudiée par Tedeschi [19]. Ainsi, et comme pratiqué par plusieurs institutions de microfinance, l'emprunteur déclarant l'echèc de son projet n'a rien à rembourser. Le fait de non remboursement menace les institutions de microfinance de fair faillite.

Dans ce modèle, on suppose que l'IMF est menacée de deux types de non remboursement : défauts stratégiques ou défauts résultants d'un choc économique. Le contrat de prêt prévoit des incitations pour décourager les emprunteurs de suivre des défauts stratégiques, mais les défauts résultants d'un choc économique sont inévitables dans ce modèle.

Les incitations au remboursement sont représentées ici par l'interaction répétée entre emprunteur et prêteur comme suivante : chaque emprunteur remboursant son prêt à l'échéance bénéficiera d'un nouveau prêt. En revanche l'emprunteur déclarant son echèc sera exclu de l'activité et n'aura pas le droit d'avoir un nouveau prêt pour certains temps.

L'investissement se fait durant une période. Les hypothèses suivantes décrivent les différents états à l'échéance, ainsi qu'ils décrivent les différentes procédures qui seront appliqués suivant le résultat d'investissement :

- **(H1).** L'emprunteur est en succès s'il a remboursé la totalité de son prêt, chargé d'un taux d'intérêt[1] r $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ fixé à l'avance, et automatiquement il bénéficiera d'un nouveau prêt (d'une unité) pour investir la période suivante.
- **(H2).** L'emprunteur est en echèc s'il n'y a pas de remboursement de sa part, parsuite il n'aura pas le droit d'un nouveau prêt durant les T $(T \geq 0)$ périodes qui suivent sa période de son défaut.
- **(H3).** Après avoir terminé la phase d'exclusion, un exclu demande un nouveau prêt et sa chance de l'avoir dépend de nombre des demandeurs admissibles et de la limite du nombre d'emprunteurs dans le portefeuille de prêteur. On note γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$, la probabilité que sa demande (d'avoir un prêt) soit accepter la premirère période qui suit la phase d'exclusion, alors que $1-\gamma$ est la probabilité que sa candidature sera reporter pour la période d'après, etc...

Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**, d'abord, par une chaine de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on représente les différents états d'un participant à ce type d'activité. Cette représentation construit le premier pas de la construction de modèle décrivant cette méthode de prêt.
Après, et puisqu'un participant prévoit son futur à partir de son état présent, alors il peut évaluer son revenu intertemporel espéré. Pour calculer ce revenu, on utilise quelques propriétés d'une chaine de Markov notamment les propriétés faible et forte de Markov qu'on a déjà présentées dans le chapitre précédent.
Ensuite, on étudie le comportement à long terme de la chaine de Markov ainsi obtenu. cette étude consiste à chercher la distribution limite de la population suivant les différents états : Bénéficiaire, exclu T périodes, etc..
Finalement, et après avoir calculer le profit intertemporel espéré, on suppose que le but de l'IMF est améliorer la situation de l'emprunteur, et qu'elle cherche à maximser son profit (profit de l'emprunteur). Cette maximisation consiste à fixer un contrat (r^*, T^*), qui maximise le profit le l'emprunteur en assurant la durabilité de l'activité. Alors un problème de maximisation avec contraintes sera imposé.

[1]Les taux d'intérét appliqués en microfinance sont élevés, (voir http ://fr.wikipedia.org/wiki/Microcrédit). En générale, le taux d'intérêt affiché est payé sur la totalité du capital emprunté pendant toute la durée de l'emprunt, en fait l'emprunteur commence à rembourser immédiatement et continue de ce fait à payer des intérêts sur une somme qu'il a déjà remboursée. On présente ici un exemple de l'Inde, cité en page 28 de Duflo [6] : si un client emprunte 104 dollars, il rembourse, sur 52 semaines, 2 dollars par semaine de capital et 40 centimes d'intérêt. Le taux d'intérêt affiché est 20%.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov qui représente les différents états d'un participant à ce type de prêt, et soit E l'ensemble des états possibles de cette chaine,

$$E := \{B, E^T, E^{T-1}, \ldots, E^1\}, \tag{3.2.1}$$

B représente l'état d'être bénéficiaire d'un prêt, E^T est l'état d'être exclu pour T périodes, E^i représente l'état d'être exlu pour les i prochaines périodes, $i = 2, \ldots, T$, E^1 est l'état d'un demandeur de prêt.
L'emprunteur est indexé par α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), la probabilité de succès de son projet[2]. La matrice de transition P, de la chaine de Markov qui représente les différents états de l'emprunteur, est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

Le diagramme suivant résume la dynamique de cette chaine de Markov.

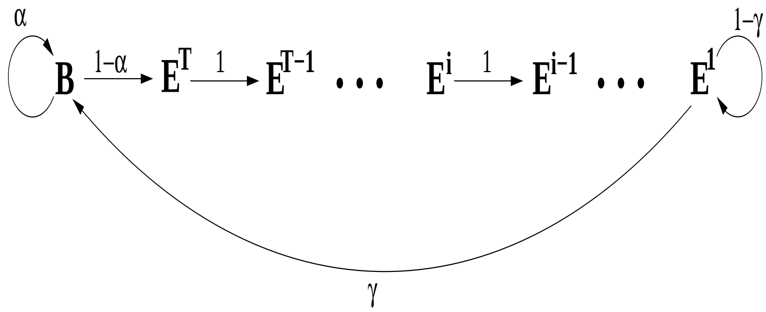

FIG. 3.1. Diagramme de la chaine de Markov X_t

Nous allons résoudre le modèle des prêts par la détermination d'un contrat (r^*, T^*) qui, à la fois, maximise le profit le l'emprunteur et assure la durabilité de l'activité.

Dans la résolution du modèle on prend en compte quelques contraintes qui assurent l'absence des défauts stratégiques et elles assurent, encore, la durabilité de l'activité de prêt. Ces contraintes sont bien décrites dans la section d'aprés.

[2]Plusieurs chercheures utilisent le fait que la portefeuille des emprunteurs est constituée de deux types d'emprunteurs, les risqués avec un probabilité de réussite α_R et les sûres avec un probabilité de réussite α_S. Si je suppose que la proportion des emprunteurs risqués dans la portefeuille est β, et celle des emprunteurs sûres est $(1-\beta)$, alors notre probabilité α représente la probabilité moyenne de réussite d'un emprunteur de la portefeuille, donc $\alpha = \beta\alpha_R + (1-\beta)\alpha_S$.

3.3 Quelques contraintes sur les variables

En étudiant ce modèle de prêt, trois types de contraintes sont prises en compte. Le premier est imposé par l'emprunteur pour participer. Le deuxième est celui qui empêche un emprunteur en succès de déclarer son echèc, notée : contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut. Le dernièr assure la durabilité et il se fait face à la faillite.

3.3.1 Contrainte de participation

On suppose que le rendement, d'une unité investie, est w ($w \geq 0$) en cas du succès de projet et nul en cas de défaillance. Pour qu'un emprunteur demande un prêt et que l'activité commence, il faut que le revenu attendu soit supérieur au remboursement du prêt. D'où ce qu'on appelle la contrainte de participation qui est modélisée par l'inéquation suivante :

$$w \geqslant 1 + r \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut

Puisqu'un emprunteur défaillant n'a rien à rembourser, alors l'IMF cherche un mécanisme qui lui assure le remboursement en cas de succès d'un projet. Ce mécanisme est présenté par le fait de bénéficier automatiquement d'un nouveau prêt en cas de remboursement et d'être exclu pour T périodes en cas de défaillance. On résume ce mecanisme par le fait que le profit de remboursement et d'être bénéficiaire d'un nouveau à l'étape suivante est supérieur au profit de non remboursement et d'avoir une phase d'exclusion de T périodes. Alors la contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut s'écrit :

$$w - (1 + r) + \delta V(B) \geqslant w + \delta V(E^T) \tag{3.3.2}$$

où δ représente le taux d'actualisation[3], $V(B)$ représente le revenu futur espéré d'un bénéficiaire d'un prêt, et $V(E^T)$ représente le revenu futur espéré d'un exclu pour T périodes. Ce profit, V, est calculé pour tous les états d'un participant $(B, E^T, \ldots)$, dans la section 5 de ce chapitre.

3.3.3 Contrainte de durabilité

L'IMF joue un rôle d'intermédiaire fincancier, au sens qu'une unité prêtée lui coûte un certain somme z. Donc, pour assurer la durabilité de l'activité de prêt, le montant du remboursement espéré doit couvrir le coût du prêt. Alors la contrainte de durabilité de l'activité en résulte :

$$\alpha(1 + r) \geqslant 1 + z \tag{3.3.3}$$

[3]Le taux d'actualisation est un coefficient permettant de ramener le futur au présent, avec $0 \leqslant \delta < 1$.

3.4 Profit d'un emprunteur

3.4.1 Revenu d'une période de prêt

Le revenu espéré d'une période, d'une unité investie, pour un emprunteur de type α est

$$\alpha[w - (1 + r)]$$

Comme on a supposé qu'un emprunteur remboursant son prêt à l'échéance bénéficie automatiquement d'un nouveau prêt, on peut alors évaluer le revenu intertemporel espéré, pour toutes les périodes futures.

3.4.2 Revenu total espéré

Pour calculer le revenu total espéré, on définit une fonction $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$f(x, y) = \begin{cases} w - (1 + r) & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $f(x, y)$ décrit le profit d'une période d'investissement, c'est le profit de passage entre deux états de la chaine.

Pour chaque trajectoire, $(X_s, X_{s+1}, ...)$, de la chaine de Markov, on définit :

$$F(X_s, X_{s+1}, ...) := \Sigma_{t=1}^{\infty} \delta^{t-s-1} f(X_{t-1}, X_t)$$

notons que F est bien définit et bornée. En effet, f est bornée, et la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \delta^i$ converge depuis que $0 \leq \delta < 1$.

Finalement, on définit le *revenu total espéré* au temps s, comme une fonction de l'état $x \in E$, $(X_s = x)$, $V_s : E \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$V_s(x) = \mathbb{E}[F(X_s, X_{s+1}, ...) \mid X_s = x]$$

Théorème 3.4.2.1. *Dans le modèle de prêt individuel définit par la chaine de Markov (3.2.1) et (3.2.2), le revenu total espéré d'un individu étant à l'état x au temps s est donné par*

$$V_s(x) = \begin{cases} \alpha[w - (1 + r)] \dfrac{1}{1 - (\alpha\delta + (1 - \alpha)\delta^T \Sigma)} & \text{si } x = B \\ \\ \alpha[w - (1 + r)] \dfrac{\delta^{i-1}\Sigma}{1 - (\alpha\delta + (1 - \alpha)\delta^T \Sigma)} & \text{si } x = E^i \ , \ i = 1, \ldots, T \end{cases} \quad (3.4.1)$$

avec $\Sigma = \frac{\gamma\delta}{1 - \delta(1 - \gamma)}$

Notons que le revenu total espéré n'est autre que le revenu espéré d'une période, $\alpha[w - (1 + r)]$, multiplié par un facteur qui le fait croître en prenant en compte les crédits futurs.

Démonstration. Puisque $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, la chaine des états successifs d'un participant, est une chaine de Markov, alors pour tout $s \geq 0$ et tout $x \in E$, par la proposition (2.2.5.2) on a :

$$V_s(x) = \mathbb{E}[F(X_s, X_{s+1}, \ldots) \mid X_s = x] = \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = x] = V_0(x)$$

Donc il suffit de calculer $V_0(x)$ pour tout $x \in E$.
Puisque $F(X_0, X_1, \ldots) = f(X_0, X_1) + F(X_1, X_2, \ldots)$ alors,

$$V_0(x) = \sum_{y\in E}(f(x,y) + \delta V_0(y))p_{xy}. \tag{3.4.2}$$

avec $p_{xy} = P[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$ est la probabilité de passage, en une étape, de l'état x à l'état y. Maintenant, calculons $V_0(x)$ pour tout $x \in E$

- Pour $x = B$, les seuls états accessibles à partir de l'état B sont B et E^T, avec les probabilités de transition suivantes : $p_{BB} = \alpha$ et $p_{BE^T} = 1 - \alpha$, donc
  $V_0(B) = \alpha(w - (1 + r)) + \alpha\delta V_0(B) + (1 - \alpha)\delta V_0(E^T)$

- Pour $x = E^i$, $i = 2, \ldots, T$, le seul état accessible à partir de l'état E^i est E^{i-1} avec $p_{E^iE^{i-1}} = 1$, donc
  $V_0(E^i) = \delta V_0(E^{i-1})$

- Pour $x = E^1$, d'après ((**H3**)) on a γ est la probabilité de transition de E^1 vers B, et $1-\gamma$ celle de rester en E^1, ceux sont les seules probabilités non nules de passage de l'état E^1.
  Si on note τ le premier instant d'être bénéficiaire après avoir été dans l'état E^1,
  $\tau := Min\{t > 0 \mid X_t = B\}$, alors τ est un temps d'arrêt. En utilisant la propriété forte de Markov du théorème (2.2.5.4), on obtient

$$\begin{aligned}
V_0(E^1) &= \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta^\tau F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_0 = E^1, \ldots, X_{\tau-1} = E^1, X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta^\tau F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau \mathbb{E}[F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau V_0(B) \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau V_0(B)] \\
&= V_0(B)\mathbb{E}[\delta^\tau]
\end{aligned}$$

  puisque le temps d'arrêt τ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\gamma)$ avec $\mathbb{P}\{\tau = k\} = (1-\gamma)^{k-1}\gamma$, alors on a

$$\mathbb{E}(\delta^\tau) = \sum_{k\geq 1}\delta^k(1-\gamma)^{k-1}\gamma = \frac{\delta\gamma}{1 - \delta(1-\gamma)}.$$

□

Remarque 3.4.2.2. Notons que le *revenu total espéré* ainsi calculé est positive tant que la contrainte de participation (3.3.1) est satisfaite. En effet, en ce cas, le numérateur est positive.

Pour le dénominateur, on a

$$1-(\alpha\delta+(1-\alpha)\delta^T\Sigma)=\frac{(1-\delta(1-\gamma))(1-\alpha\delta)-(1-\alpha)\gamma\delta^{T+1}}{1-\delta(1-\gamma)}$$

or $\delta<1$ donc

$$(1-\delta(1-\gamma))(1-\alpha\delta)-(1-\alpha)\gamma\delta^{T+1}>(1-\delta(1-\gamma))(1-\alpha\delta)-(1-\alpha)\gamma\delta=(1-\delta)(1-\alpha\delta(1-\gamma))>0$$

En plus, vue comme une fonction de (r,T), ce revenu est une fonction décroissante de deux variables taux d'intérêt et durée de phase d'exclusion.

3.5 Proportion de bénéficiaires dans la population à l'équilibre

Une conséquence intéressante d'introduire une chaine de Markov pour la modélisation de cette dynamique est l'étude de l'évolution de distribution de population dans les différents états B, E^T, ..., E^1. La proposition suivante en résulte :

Proposition 3.5.0.3. *Pour toute distribution initiale $\pi_0=(\pi_0^1,\ldots,\pi_0^{T+1})$ de la population suivant les différents états B, E^T, ..., E^1, la dynamique Markovienne, $(\pi_0P^t)_{t\in\mathbb{N}}$, tend vers la distribution stationnaire π_* quand t tend vers l'infini, avec*

$$\pi_*=\frac{1}{\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\gamma}+(T-1)}\left(\frac{1}{1-\alpha},1,1,\ldots,1,\frac{1}{\gamma}\right).$$

Démonstration. La chaine de Markov ainsi définit est irréductible et apériodique. En effet, à partir de la puissance $2T-1$, la matrice P admet toutes ses puissances strictement positives. Donc les hypothèses du théorème (2.2.6.8) sont satisfaites. Alors, on a π_* est le vecteur propre invariant à gauche de cette chaine. Donc, on montre que $\lim_{t\to+\infty}\pi_0P^t=\pi_*$. Ce qui signifie que la distribution de la population, des différents états, tend vers la distribution limite π_* quand t tend vers l'infini, avec π_* est la solution du système suivant :

$$\begin{cases}\pi P &= \pi\\ |\pi| &= 1\end{cases}$$

□

Notons, dire que $\pi_*=(\pi_*^1,\pi_*^2,\ldots,\pi_*^{T+1})$ est une distribution stationnaire, ça revient à dire que si N est le nombre (fixe) total des emprunteurs potentiels, alors à l'équilibre (t grand) π_*^1N est le nombre des bénéficiaires actuels tandis que $(1-\pi_*^1)N$ est le nombre des emprunteurs impliqués attendant l'obtention d'un prêt.

3.6 Profit de l'IMF

Le prêteur éprouve encore ses profits selon l'étape du jeu (prêt ou exclusion). D'ailleurs il réagit dans les deux étapes, il continue à prêter la partie qui continue à rembourser et arrête de prêter celle qui fait défaut.

– **Profit espéré de l'IMF d'une période :** Comme l'IMF joue le rôle d'un intermédiaire financier, alors une unité prétée coûte l'IMF un certain montant z. Donc le revenu espéré, d'une unité prétée durant une période pour un emprunteur de type α (α est la probabilité de réussite du projet), est :
$$\alpha(1+r) - (1+z)$$
– **Profit intertemporel espéré :** De la même manière du calcul du *revenu total espéré* d'un empruteur de type α participant à ce type d'activité, (voire section précédente), on peut, encore, calculer le revenu total espéré de l'IMF comme étant les résultat de l'investissement intertemporel d'un emprunteur de type α.
Corollaire 3.6.0.4. *Dans le modèle de prêt individuel définit par la chaine de Markov (3.2.1), (3.2.2), et à un instant s donné, le revenu futur total espéré de l'IMF provenant de l'investissement d'un emprunteur étant à l'état x au temps s est donné par*

$$V'_s(x) = \begin{cases} (\alpha(1+r) - (1+z))\dfrac{1}{1-(\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T\Sigma)} & \textit{si } x = B \\ \\ (\alpha(1+r) - (1+z))\dfrac{\delta^{i-1}\Sigma}{1-(\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T\Sigma)} & \textit{si } x = E^i \ , \ \ i = 1, \dots, T \end{cases} \tag{3.6.1}$$

Démonstration. La démonstration de ce corollaire se fait de la même manière que la démonstration du théorème précédent. □

3.7 Contrat optimal

On suppose que le but de l'institution de microfinance est l'amélioration de la situation sociale de l'emprunteur et qu'elle cherche un contrat qui maximise son profit (profit de l'emprunteur de l'equation (3.4.1)). On suppose aussi que l'emprunteur a toujours intérêt à investir, ceci est justifié par le fait que le revenu d'un investissement est toujours supérieur au remboursement suchargé de taux d'intérêt (la contrainte (3.3.1) est toujours satisfaite). Donc, la maximisation doit respecter la contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut (3.3.2) et la contrainte de durabilité de l'IMF (3.3.3).

Trouver le contrat optimal $(r^*, T^*) \in K = [0,1] \times [0, \infty[$, qui maximise le profit de l'emprunteur en respectant les contraintes, ça revient à touver la solution du problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} (r^*, T^*) \in C, \\ J(r^*, T^*) = \max\limits_{(r,T)\in C} J(r,T) \\ C = \{(r,T) \in K; h_1(r,T) \geqslant 0, h_2(r,T) \geqslant 0\} \end{cases}$$

où
$J(r,T) = \alpha[w - (1+r)]\dfrac{1}{1-(\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T\Sigma)}$ est le revenu total espéré d'un bénéficiaire d'un prêt.

$h_1(r,T) = \alpha(1+r) - (1+z)$ est la contrainte de la durabilité.

$h_2(r,T) = (\delta - \Sigma\delta^T)J(r,T) - (1+r)$ est la contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut.
Les solutions de ($\mathcal{P}$) sont les solutions de ($\mathcal{P}'$), où

$$(\mathcal{P}') = \begin{cases} (r^*, T^*) \in C, \\ J(r^*, T^*) = \min\limits_{(r,T)\in C} \text{-}J(r,T) \\ C = \{(r,T) \in K; -h_1(r,T) \leqslant 0, -h_2(r,T) \leqslant 0\} \end{cases}$$

On suppose qu'il existe (r^*, T^*) qui minimise $-J$ (maximise J). Soit $\mathcal{J}$ la matrice jacobienne de (h_1, h_2)

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 + \dfrac{\alpha(\delta - \Sigma\delta^T)}{1 - (\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T\Sigma)} & \dfrac{\alpha(1-\delta)\Sigma\delta^T ln\delta(w - (1+r))}{(1 - (\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T\Sigma))^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice jacobienne[4] est de rang 2 pour tout $(r,T) \in K$, donc la condition de qualification de contraintes est partout verifiée (voir théorème 2.3.3.1) et en particulier pour (r^*, T^*). Parsuite tout point de minimum est un point critique du lagrangien et les conditions KKT s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla J(r^*, T^*) + \mu_1 \nabla h_1(r^*, T^*) + \mu_2 \nabla h_2(r^*, T^*) = 0 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \\ h_1(r^*, T^*) \leq 0, \ \mu_1 h_1 = 0 \\ h_2(r^*, T^*) \leq 0, \ \mu_2 h_2 = 0 \end{cases}$$

on résoud le problème suivant les cas où les contraintes sont actives ou ne les sont pas. La seule solution qu'on obtient est celle qui vérifie [5] $h_1(r,T) = 0$, et $h_2(r,T) = 0$ ce qui donne (r^*, T^*) tels que :
$r^* = \dfrac{1+z}{\alpha} - 1$, et $T^* = \dfrac{1}{ln(\delta)} ln\left(\dfrac{[1 - \delta(1-\gamma)][\alpha\delta w - (1+r^*)]}{\gamma[\alpha w - (1+r^*)]}\right) - 1$
pour $\mu_1 = \dfrac{1}{\alpha(1-\delta)}$, et $\mu_2 = \dfrac{1-\alpha}{1-\delta}$.

Remarque 3.7.0.5. Quelques conditions doivent être satisfaites pour assurer l'existence de T^* et sa positivité. Pour l'existence de T^*, on a besoin que le revenu espéré est supérieur au coût de prêt ($\alpha w > 1 + r^*$), et la valeur de δ est suffisament grande pour avoir $\alpha\delta w - (1+r^*) > 0$. La positivité de T^* est vérifiée si δ est assez grand, cela signifie que l'empruteur doit suffisament donner une valeur pour le futur. L'exsitence de T^* et sa positivité sont satisfaites pour les $w \in (\dfrac{1+r^*}{\alpha\delta}, \dfrac{1+r^*}{\alpha\delta(1-\gamma)})$.

[4]Comme on a supposé que la contrainte de participation est satisfaite ($w > 1 + r$), alors la matrice jacobienne est de rang 2 si $\delta \neq 1$, qu'on la suppose satisfaite ici.

[5]Dire que la contrainte de durabilité est saturée ($h_1(r,T) = 0$), revient à dire que le profit du prêteur est nul (en moyenne).

3.8 Comportement d'un emprunteur

Dans l'étude ainsi présenté, on a supposé que, pour chaque période de prêt, le montant de prêt est fixé à une unité. Des techniques plus avantagés peuvent être appliquées dans cette activité ceci est illustré par le fait que plusieurs institutions de microfinance pratiquent des crédits de montants progressifs. Le premier crédit accordé est de faible montant, afin de minimiser le risque. Le remboursement régulier par le client des premiers crédits est aux yeux de l'institution une garantie suffisante pour augmenter le montant des crédits suivants.

En termes mathématiques, soit $S = X_1, X_2, \ldots, X_n$ une séquence donné de n transition d'un emprunteur. Ainsi le comportement d'un emprunteur peut être étudié suivant les états qui se présentent dans la séquence S. L'evenement "un emprunteur est en succès" veut dire que l'emprunteur aura un nouveau prêt, donc c'est une transition BB. Soient $W = BB$ un événement, et λ le paramètre qui modélise le comportement d'un emprunteur, avec

$$\lambda = \frac{N_W}{N_B}$$

où N_B est le nombre de fois d'avoir un prêt dans la séquence S,

$$N_B = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}\{X_i = B\}$$

et N_W est le nombre de fois d'être en succès dans la séquence S

$$N_W = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}\{X_i = B, X_{i+1} = B\}$$

et $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice.

L'IMF fixe deux seuils λ_{min} et λ_{max}, et elle réagit de la façon suivante :

1. si $\lambda < \lambda_{min}$ alors l'emprunteur sera compté parmi les mouvais emprunteurs et il sera exclu de cette activité pour le reste de la vie, ou encore une technique d'un taux d'intérêt plus élevé sera appliquée.
2. si $\lambda > \lambda_{max}$ alors l'emprunteur sera vu parmi les bons emprunteurs et il bénéficiera d'un montant de prêt plus élevé, ou encore il bénéficiera d'un taux d'intérêt plus bas.
3. si $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ l'activité continuera de la même façon, i.e. même montant (resp même taux d'intérêt) du prêt sera appliqué.

3.9 Résumé

Dnas ce chapitre, on a présenté un modèle mathématique de l'activité de microcrédit en cas de prêt individuel. Ce modèle est basé sur des incitations dynamiques au remboursement qui consiste à rénouveler le prêt pour un emprunteur ayant remboursé la totalité de son prêt à l'échéance et à interdire d'accéder à des crédits ultérieurs, pour certains temps, un emprunteur ayant fait défaut. Ce modèles est inspiré du papier de l'economiste G.A. Tedeschi (voir [19])

D'abord par une chaine de Markov, j'ai présenté les différents états d'un participant à ce type d'activité en microcrédit. En utilisant quelques propriétés de la chaine de Markov, on a pu calculer les profits intertemporels espérés, de l'emprunteur et du prêteur ainsi que la distribution de bénéficiaires et exclus du prêt de la population à l'équilibre. Ensuite, pour assurer l'activité de prêt, deux contraintes principales sont introduites : la première assure le remboursement en cas de succès, et la deuxième assure la durabilité de l'activité. Et finalement, on a calculé un contrat optimal (r^*, T^*), qui maximise le profit de l'emprunteur en respectant les contraintes du modèle.

CHAPITRE 4

Modèle de prêt groupé

4.1 Introduction

Afin de rejoindre les clientèles de microcrédit avec des prêts à des conditions plus avantageuses, des caractéristiques de crédit groupé avec coopérations sont spontanément présentes et appliquées par plusieurs intitutions de microfinance dans de nombreux pays en développement. Les méthodes de prêt groupé sont utilisés pour résoudre les problèmes de la sélection adverse et d'aléa moral. D'un part, pour réduire la sélection adverse, les membres sont responsables pour les prêts les uns des autres, ils sont mieux informés que le prêteur de choisir des personnes qu'ils estiment les plus susceptibles de rembourser. D'autre part, lorsque les groupes sont formés, chaque membre a l'incitation de contrôler les comportements des autres, en réduisant l'aléa moral et les coûts de surveillance du prêteur.

Le prêt groupé fait spécifiquement référence à des arrangements par des individuels qui se rassemblent et forment des groupes dans le but d'obtenir des prêts auprès d'un prêteur. La particularité est que les prêts sont accordés individuellement aux membres du groupe, mais le groupe tout entier va faire face si un membre se heurte à des difficultés de remboursement.

Des organisations bien connues, telles que la Banque Grameen[1] au Bangladesh et BancoSol[2] en Bolivie, renforcent l'idée que, sous certaines conditions et pour certains types de clientèles, ce technique de prêt peut être efficace dans la fourniture de prêts formels à des telles clientèles.

Encore, selon nombreux pratiquants d'activité de microcrédit, la technologie de prêt groupé a été proposée comme une solution possible aux problèmes de la fourniture de prêts à un grand nombre d'agents exclus ailleurs.

Plusieurs recherches ont porté sur l'étude des méthodes de prêt groupé. Besley et Coate [4] analysent une stratégie de prêt groupé sous responsabilité partagée au remboursement. Ils montrent que les membres du groupe en succès peuvent être incités à rembourser les prêts pour ceux (du groupe) qui sont en difficultés. Ghatak et Guinnane [9], et Stiglitz [18] analysent le problème d'aléa moral en cas de prêt groupé. Ahlin et Townsen [1] ont étudié l'effet de prêt goupé sur le taux de remboursement. Ghatak [8] a présenté comment la sélection adverse

[1] Une fois par semaine dans des villages de Bangladesh, des groupes de quarante villageois se rencontrent pour environ une demi heure, rejoints par un agent de crédit de l'institut de microfinance. Chaque groupe (de 40 personnes) de villageois est divisé en groupe de 5 personnes contenant chacun un gérant. L'agent de crédit enregistre les transactions dans son livre et gére l'activité de remboursement. Avant de partir, il peut dispenser des conseils et faire des arrangement pour que les clients, en succés, puissent obtenir des nouveaux prêts, (voir Yunus [21] et Rodriguez-Meza [17]).

[2] L'ONG bolivienne PRODEM créée en 1986 décide de " filialiser " ses activités de microfinance sous forme de banque en créant la Banco Solario SA, plus connue sous le nom de BancoSol, voir Rodriguez-Meza [17].

des emprunteurs peut être partiellement résolue par la présence d'une clause de responsabilité collective au remboursement dans un prêt groupé.

Dans le rapport de thèse de Rodriguez-Meza (voir [17]), il y a des données empiriques qui montrent toutes sortes de résultats, allant de succès à un echèc complet, en applicant les méthodes de prêt groupé. les principes technologiques contractuels implicites donnent à penser que ces approches peuvent être rentables pour des clientèles spécifiques.

En cas de Grameen Bank, les groupes sont constitués de cinq personnes. En cas de BancoSol, les groupes peuvent être aussi petit que trois personnes. En cas des systémes bancaires villageoises de FINCA[3], les groupes sont constitués de dix à quinze personnes (femmes) en groupes. L'idée fondamentale de la responsabilité conjointe est commune à toutes les approches.

Ce chapitre est constitué de deux parties. Dans la première partie on présente un modèle décrivant une méthode de prêt pour un groupe de deux personnes, tandis que la deuxième partie traite un modèle de prêt groupé dont le groupe est constitué de n personnes ($n \geqslant 2$). Ces modèles représentent une extension du modèle étudié au chapitre précédent. L'extension est basé sur le même principe d'incitation au remboursement qui consiste à renouveler le prêt pour la personne qui rembourse son prêt à l'échéance, et interdire de droit de prêt, pour un certain temps définit à l'avance, le défaillant. En cas de non remboursement, un défaillant sera remplacé par un nouveau bénéficiaire pour garder le même nombre de personnes en groupe. Notons que le remboursement du montant de la responsabilité jointe peut diminuer la durée d'exclusion d'un défaillant.

Pour les deux modèles, par une chaine de Markov on représente les différents états d'un participant à ce type d'activité. L'utilisation d'une chaine de Markov nous permet de calculer le profit intertemporel espéré pour un seul individu du groupe et la répartition, à l'équilibre, des participants suivant les différents états. Ainsi, une comparaison (répartitions et profits) entre les deux modèles, individuel et groupé, sera présentée dans chaque partie.

[3]Foundation for International Community Assistance (FINCA International) est une association de microcrédit, à but non-lucratif, fondée par John Hatch en 1984. Parfois désignée comme la " Banque mondiale des pauvres " et un " vaccin de la pauvreté pour la planète ", FINCA est l'instigateur de la méthodologie du village banking dans le microcrédit, et est considéré comme l'un des pionniers de la microfinance moderne. Avec son quartier général à Washington, DC, FINCA possède 21 pays affiliés, en Amérique latine, aux Caraïbes, en Afrique, en Europe de l'Est, en Asie occidentale et centrale. Avec la Grameen Bank et Accion International, FINCA est considérée comme l'une des organisations de microfinance les plus influentes au monde (voir http// :fr.wikipedia.org/wiki/Foundation_for_International_Community_Assistance).

Groupe de deux emprunteurs

Dans cette première partie, le modèle qu'on présente décrit une méthode de prêt groupé, où un groupe est formé de deux personnes ayant deux projets qui représentent le même niveau de risque. Cette méthode de prêt utilise l'esprit des prêts successifs comme incitations au remboursement. Au début de l'activité, le groupe reçoit un prêt de deux unités, une unité pour chaque emprunteur. Chaque emprunteur investit dans son propre projet. On suppose que les revenus de deux projets sont indépendants. Tant que le groupe rembourse les prêts à l'échéance, un renouvellement automatiquement de prêt sera fait. Tandis qu'une exclusion de renouvellement de prêt sera imposée pour un emprunteur en défaillance. Suivant qu'il y aura un remboursement partiel ou aucun remboursement, deux durées d'exclusion de droit d'un nouveau prêt seront appliquées.

4.2 Formation des groupes d'emprunteurs

Pour illustrer le système de formation des groupes, on suppose que chaque emprunteur connaît son propre type (risque individuel attaché à son projet), et celui des autres. Cette hypothèse conditionne, en effet, le système de formation des groupes d'empruteurs.
Sous cette hypothèse, on montre que si le prêteur propose des contrats avec responsabilité conjointe, un emprunteur a intérêt à former un groupe avec un partenaire du même type que lui. Autrement dit, un emprunteur peu risqué choisira un partenaire du même type s'il veut maximiser son gain espéré. En effet, si un groupe est formé de deux personnes qu'on les note 1 et 2, 1 est de type α_1 (probabilité de réussite de son projet), et 2 est de type α_2. L'IMF propose un contrat (r, q, T_1, T) où

- r est le taux d'intérêt que l'emprunteur doit payer au titre de la responsabilité individuelle limitée.
- q est le montant du transfert que l'emprunteur doit payer au titre de la responsabilité collective, i.e. lorsque lui-même a réussit mais son partenaire a échoué.
- T est la durée de la phase d'exclusion en cas de défaillance de deux membres de groupe.
- T_1 est la durée de la phase d'exclusion appliquée sur un emprunteur en défaut sachant que son partenaire est en succès et ayant remboursé $1 + r + q$.

On suppose qu'une unité empruntée réalise un rendement w en cas de succès du projet, et rien en cas de défaillance. Si l'emprunteur de type α_1 forme un groupe avec un partenaire de type α_2, alors l'espérance de gain d'une période d'investissement, d'une unité, pour le premier est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,q} &= \alpha_1\alpha_2(w-(1+r)) + \alpha_1(1-\alpha_2)(w-(1+r+q)) \\ &= \alpha_1(w-(1+r)-(1-\alpha_2)q) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

qui est une fonction croissante en α_2. Il en résulte qu'un emprunteur préfère toujours s'associer à un partenaire plus sûr. Si on suppose qu'il existe toujours deux emprunteurs ayant le même type α, alors un entrepreneur de ce type peut toujours trouver un partenaire du même type que lui pour constituer, ensemble, un groupe où la responsabilité de remboursement est à la fois individuelle et collective. Ainsi, à l'équilibre (de formation des groupes), on suppose que les groupes sont constitués de partenaires du même type i.e. dont les projets d'investissement ont la même probabilité de succès.

4.3 Modèle de prêt pour un groupe de deux emprunteurs

D'après la section précédente, on suppose que les groupes sont formés de deux emprunteurs identiques qui représentent le même niveau de risque. Au début de l'activité, un groupe obtient un prêt de deux unités, une unité pour chaque emprunteur. Chaque emprunteur investit dans son propre projet. On suppose que les revenus de deux projets sont indépendants.

Le modèle qu'on va présenter est basé sur l'interaction répétée entre prêteur et emprunteur (incitation dynamique), où à la maturité de chaque période de prêt, le prêteur va réagir suivant les résultats de l'investissement : il continue à préter ceux qui ont remboursé, et cesse l'activité pour ceux qui ont fait défaut.

La dynamique de l'interaction entre le prêteur et l'emprunteur est décrite par les hypothèses suivantes :

– **(H1).** En cas de succés de deux membres du groupe, où les deux membres remboursent leurs prêts, on a donc un remboursement total de $2(1+r)$, les deux emprunteurs bénéficieront d'un nouveau prêt (une unité pour chacun) pour une nouvelle période d'investissement.

– **(H2).** En cas d'echèc de deux membres du groupe, où les deux membres n'ont rien remboursé, tous les deux seront exclus et n'auront pas le droit d'avoir un nouveau prêt pour T périodes (pour permettre de faire comparaison entre les deux modèles individuel et groupé, on choisit la même durée de la phase d'exclusion en cas d'echèc total que le prêt individuel du chapitre précédent).

– **(H3).** En cas d'une situation mixte, où un emprunteur est en succés et son partenaire est en echèc, celui qui échoue n'a rien remboursé, tandis que l'emprunteur en succés rembourse, en plus de son prêt $1+r$, un montant $q = \beta(1+r)$ qui représente le montant de la responsabilité jointe du contrat, avec $0 \leqslant \beta \leq 1$. Dans ce cas, l'emprunteur en succès bénéficiera d'un nouveau prêt pour la période suivante (avec un autre partenaire), mais le défaillant doit avoir une phase d'exclusion. Cette phase d'exclusion dure T_1 périodes, $T_1 \leqslant T$ à cause de la partie q de remboursement de la part de son conjoint.

– **(H4).** Egalement comme dans le modèle individuel, on suppose qu'un exclu revient toujours en reclamant un nouveau prêt qu'il obtient avec la probabilité γ à la première période qui suit sa phase d'exclusion, avec la probabilité $\gamma(1-\gamma)$ qu'il obtient à la deuxième période qui suit la phase l'exclusion, et ainsi de suite... .

Comme on a supposé que chaque projet du groupe est indépendant de l'autre, on peut examiner les différent états qui peuvent arriver pour un participant à ce type d'activité. Par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, on représente les différents états d'un emprunteur, avec E est l'ensemble des états :

$$E := \{B^2, B^1, E^T, \ldots, E^{T_1}, \ldots, E^1\}, \tag{4.3.1}$$

B^2 représente l'état d'un bénéficiaire d'un prêt et mettant avec le même partenaire de la période d'avant, B^1 représente l'état d'un bénéficiaire d'un prêt et mettant avec un autre partenaire de la période d'avant et E^i représente l'état d'un exclu pour les i prochaines périodes de prêt.

Pour un couple (X_i, Y_i) qui se met ensemble à la $i$ème période de prêt, le tableau 4.1

représente les résultats possibles à l'échéance (situations et payement des emprunteurs) ainsi qu'il représente les états possibles de la $i+1$ème période (X_{i+1} et Y_{i+1}).
La matrice de transition de cette chaîne de Markov est donnée par :

TAB. 4.1

X_i	Y_i	payement de X_i	payement de Y_i	X_{i+1}	Y_{i+1}
succès	succès	$1+r$	$1+r$	B^2	B^2
succès	echèc	$1+r+q$	0	B^1	E^{T_1}
echèc	succès	0	$1+r+q$	E^{T_1}	B^1
echèc	echèc	0	0	E^T	E^T

$$P=\begin{pmatrix}
\alpha^2 & \alpha(1-\alpha) & (1-\alpha)^2 & 0 & 0 & 0\cdots0 & \alpha(1-\alpha) & 0\cdots0 & 0\\
\alpha^2 & \alpha(1-\alpha) & (1-\alpha)^2 & 0 & 0 & 0\cdots0 & \alpha(1-\alpha) & 0\cdots0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0\\
. & . & . & . & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & & . & . & 0\cdots1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1\\
0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1-\gamma
\end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

Fig 4.1 résume la dynamique de cette chaîne de Markov.

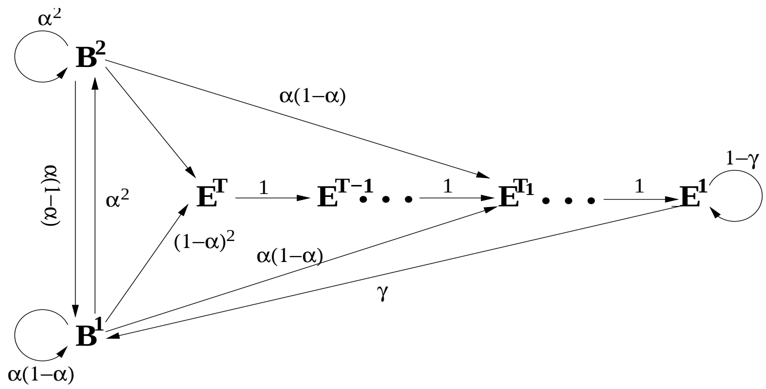

FIG. 4.1. Les différents états pour un participant au prêt groupé avec les probabilités de transition correspondantes.

4.4 Contraintes d'un contrat goupé

Les trois types de contraintes introduites au chapitre précédent se présentent toujours dans l'analyse de ce modèle de prét groupé. Mais, elles sont modifiées de la façon suivante :

Contrainte de participation

En cas de succès d'un membre du groupe, le montant qu'il doit rembourser dépend de la situation de son partenaire. Avoir un partenaire en succés, l'emprunteur va rembourser seulement son prêt (chargé du taux d'intérêt). Tandis qu'avoir un partenaire en défaut, l'emprunteur va rembourser, en plus de son prêt, le montant de la responsabilité de coopération. La situation “avoir un partenaire en défaut” est plus délicate et la contrainte de participation qui décrit cette situation est plus forte que la contrainte décrivant la situation “avoir un partenaire en succès”. Pour cela la contrainte de participation d'un individu à ce type de contrat se résume comme suit :

$$w \geqslant 1 + r + q \tag{4.4.1}$$

ce qui veut dire que le revenu doit depasser le montant de remboursement.

Contrainte de durabilité

Sous les mêmes conditions de prêt du modèle individuel, une unité prétée coûte le prêteur un certain z. Donc pour assurer la durabilité de l'activité, le prêteur doit imposer une condition sur les variables du contrat qui résume le fait que le remboursement espéré doit couvrir le coût du prêt, ou

$$2\alpha^2(1 + r) + 2\alpha(1 - \alpha)(1 + r + q) \geqslant 2(1 + z)$$

ce qui revient à dire :

$$\alpha(1 + r) + \alpha(1 - \alpha)q \geqslant 1 + z \tag{4.4.2}$$

Remarque 4.4.0.6. On remarque que sous la condition de profit nul de prêteur, où la contrainte de recouvrement de prêt est saturée, un emprunteur profite toujours d'un taux d'intérêt plus bas en participant à la méthode de prêt groupé qu'à la méthode de prêt individuel présentée dans le chapitre précédent.

Contraintes d'empêchement de la stratégie de défaut

L'incitation au remboursement concerne surtout l'emprunteur ayant un projet en succès, un projet qui lui a achevé quelque revenu. Le mecanisme d'incitation consiste à menacer l'emprunteur par le fait de non refinancement en cas de défaillance. Afin d'inciter l'emprunteur à payer quand il est capable, la privation imposée par la phase d'exclusion de droit de prêt doit être plus grande que le gain de non-remboursement.

Suivant la situation de partenaire, deux contraintes d'incitation sont imposées sur un emprunteur pour lui convaincre à rembourser en cas de succès. La première contrainte concernant le cas
“ avoir un partenaire déclarant son succès” et la deuxième concernant l'autre cas “avoir un

partenaire déclarant son echèc". L'incitation au remboursement doit être présentée à chaque instant de l'activité. Si on suppose qu'un groupe est formé, à l'instant i, d'un couple (X_i, Y_i), alors l'incitation au remboursement concernant l'emprunteur X sont :

1. Y déclare son succès. Dans ce cas, il y a un remboursement sûr d'un montant de $1 + r$ de la part de Y, et si X déclare sa défaillance, alors Y rembourse la somme q de plus et X sera exlcu T_1 périodes :

$$w - (1 + r) + \delta W_{i+1}(B^2) \geqslant w + \delta W_{i+1}(E^{T_1}) \tag{4.4.3}$$

2. Y déclare sa défaillance. Dans ce cas Y n'a rien remboursé, donc le remboursement de X doit être $1 + r + q$ car sinon, on aura un groupe dont les deux membres ont fait défaut, donc les deux membres seront exclu T périodes de prêt :

$$w - (1 + r + q) + \delta W_{i+1}(B^1) \geqslant w + \delta W_{i+1}(E^T) \tag{4.4.4}$$

où $W_i(x)$ est le profit futur espéré pour un emprunteur étant à l'etat x au temps i. Ce profit est calculé pour tous les états possibles dans la section d'après.

4.5 Profit pour un emprunteur de prêt groupé

Chaque groupe est constitué de deux emprunteurs identiques, qui représentent le même niveau de risque. On s'intéresse à calculer le profit d'un emprunteur participant à ce type d'activité dont les régles sont bien définies par les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** et **(H4)** . D'abord on calcule l'espérance de son revenu d'investissement pour une période, ensuite, comme il s'agit d'une dynamique d'incitation au sens de renouvellement du prêt en cas de remboursement, on calcule l'espérance de son revenu intertemporel.

4.5.1 Revenu espéré d'une période d'investissement

Pour un emprunteur de type α (son partenaire de même type), d'après l'équation (4.2.1), l'espérance de revenu d'une période d'investissement est

$$\mathbb{E}_{r,q} = \alpha[w - (1 + r) - (1 - \alpha)q] \tag{4.5.1}$$

où w représente le rendement d'une unité investie en cas de réussite d'un projet.

Remarque 4.5.1.1. Pour cette valeur du revenu d'une période d'investissement, on remarque que si on garde le même montant du taux d'intérêt pour les deux cas individuel et groupé, alors tant que $q \neq 0$, l'emprunteur et plus rentable en cas individuel qu'en cas groupé, pour une période d'investissement.

4.5.2 Revenu intertemporel espéré

Le renouvellement de prêt se fait automatiquement en cas de remboursement. Ailleurs, en cas de défaillance, un emprunteur sera exlcu pour plusieurs périodes (T périodes en cas d'avoir un partenaire en échec et T_1 périodes en cas d'avoir un partenaire en succès, voir les hypothèses). Ainsi, à partir de n'importe quel instant, on peut évaluer le revenu total espéré pour un participant à ce type d'activité. On définit une fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui décrit le revenu d'une période d'investissement, tel que

$$f(x,y) = \begin{cases} w - (1+r) & \text{si } (x,y) = (B^i, B^2), \text{ i=1,2} \\ w - (1+r+q) & \text{si } (x,y) = (B^i, B^1), \text{ i=1,2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

encore, à partir d'un état X_s à l'instant s, on définit une fonction de la trajectoire future de la chaîne par

$$F(X_s, X_{s+1}, ...) := \Sigma_{t=1}^{\infty} \delta^{t-s-1} f(X_{t-1}, X_t)$$

Pour $X = (X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots)$ une chaine des états successifs d'un participant, avec $x = X_s$ est la $s$ème état, on note $W_s(x)$, le revenu total futur espéré à partir de l'instant s d'un participant ayant X comme chaine avec $W_s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définit pour tout $x \in E$ par

$$W_s(x) = \mathbb{E}[F(X_s, X_{s+1}, \ldots) \mid X_s = x].$$

Théorème 4.5.2.1. *Dans ce modèle de microcrédit où les états d'un participant sont représentés par la chaîne de Markov (4.3.1) et (4.3.2), et sous les hypothèses* ***(H1)****,* ***(H2)****,* ***(H3)*** *et* ***(H4)****, le revenu futur espéré, à partir d'une période s d'investissemnt et pour un participant étant à l'état x à cette période, est :*

$$W_s(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha[w - (1+r) - (1-\alpha)q]}{1 - [\alpha\delta + (1-\alpha)(\alpha\delta^{T_1} + (1-\alpha)\delta^T)\Sigma]} & \textit{si } x \in \{B^1, B^2\} \\ \\ \dfrac{\alpha[w - (1+r) - (1-\alpha)q]\delta^{i-1}\Sigma}{1 - [\alpha\delta + (1-\alpha)(\alpha\delta^{T_1} + (1-\alpha)\delta^T)\Sigma]} & \textit{si } x = E^i, \ i = 1, \cdots, T \end{cases} \tag{4.5.2}$$

Démonstration. La démonstration est trés similaire à celle du théorème (3.4.2.1). En utilisant les propriétés de Markov, on a $W_s(x) = W_0(x)$ pour tout $s \geq 0$. Donc tout ce que nous avons à faire est calculer $W_0(x)$ pour tout $x \in E$.
Comme on a $F(X_0, X_1, \ldots) = f(X_0, X_1) + \delta F(X_1, X_2, \ldots)$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$W_0(x) = \sum_{y \in E} (f(x,y) + \delta W_0(y)) p_{xy}$$

avec $p_{xy} = P[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$ est la probabilité de passage, en une seule étape, de x à y.

1. pour $x = E^i$, avec $i = 2, \ldots, T$, la démonstration se fait comme dans le théorème (3.4.2.1) pour avoir :
$$W_0(E^i) = \delta W_0(E^{i-1})$$
et pour E^1 on obtient :
$$W_0(E^1) = \frac{\delta\gamma}{1 - \delta(1-\gamma)} W_0(B^1)$$

2. pour $x = B^1$, on a

$$\begin{aligned} W_0(B^1) &= \alpha^2[w-(1+r)+\delta W_0(B^2)] + \alpha(1-\alpha)[w-(1+r+q)+\delta W_0(B^1)] \\ &+\alpha(1-\alpha)\delta W_0(E^{T_1}) + (1-\alpha)^2\delta W_0(E^T) \end{aligned}$$

3. pour $x = B^2$, on a

$$\begin{aligned} W_0(B^1) &= \alpha^2[w-(1+r)+\delta W_0(B^2)] + \alpha(1-\alpha)[w-(1+r+q)+\delta W_0(B^1)] \\ &+\alpha(1-\alpha)\delta W_0(E^{T_1}) + (1-\alpha)^2\delta W_0(E^T) \end{aligned}$$

on remarque que

$$W_0(B^1) = W_0(B^2) = \frac{\alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)q]}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)(\alpha\delta^{T_1}+(1-\alpha)\delta^T)\Sigma]}$$

□

Remarque 4.5.2.2. Le revenu intertemporel espéré ainsi calculé est positive tant que la contrainte de participation (4.4.1) est satisfaite. En plus c'est revenu n'est autre que le profit espéré d'une période d'investissement multiplié par un facteur qui lui fait croître en prenant en compte les crédits futurs. Encore, c'est une fonction décroissante de r, q, T et de T_1.

Remarque 4.5.2.3. Si on garde le même taux d'intérêt pour les deux contrats, individuel et groupé, si on suppose que $T_1 = T_1(q)$ avec $T_1(0) = T$, alors dans le cas où il n'y a pas de remboursement partiel, un emprunteur realise le même profit en participant au prêt individuel ou au prêt groupé.

Corollaire 4.5.2.4. *Pour deux contrats de prêt proposés par le prêteur qui ont le même taux d'intérêt r, un contrat individuel (r, T) et un contrat groupé (r, q, T_1, T), où $T_1 \leqslant T$, un emprunteur choisit le contrat groupé si et seulement si $q \leqslant A$, avec*

$$A = \alpha(w-(1+r))\frac{(\delta^{T_1}-\delta^T)\Sigma}{1-(\alpha\delta+(1-\alpha)\delta^T\Sigma)}$$

Démonstration. Soient $V = \dfrac{\alpha[w-(1+r)]}{1-(\alpha\delta+(1-\alpha)\delta^T\Sigma)}$

et
$W = \dfrac{\alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)q]}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)(\alpha\delta^{T_1}+(1-\alpha)\delta^T)\Sigma]}$
où V est le revenu total espéré pour un bénéficiaire d'un contrat individuel (r, T) et W est le revenu total espéré pour un bénéficiaire d'un contrat groupé (r, q, T_1, T) (en gardant le même taux d'intérêt r dans les deux contrats, et la même durée de la phase d'exclusion T, avec $T_1 \leqslant T$ et $q \leqslant 1+r$). l'inégalité $W \geqslant V$ est équivalent à $q \leqslant A$. □

Remarque 4.5.2.5. Pour $T_1 = T$, on a $A = 0$, la valeur maximale que q peut prendre sera nul. Sous ces conditions, tant que $q > 0$, c'est plus rentable pour un emprunteur de choisir un contrat individuel. C'est donc naturel de supposer que $T_1 \leqslant T$.

4.6 Contrat optimal d'un prêt groupé

Dans le chapitre précédent on a calculé un contrat optimal qui maximise le profit d'un emprunteur participant au prêt individuel. Ce contrat est constitué d'un taux d'intérêt et d'une durée de la phase d'exclusion. Ici, dans ce modèle de prêt groupé, un contrat est constitué de quatres variables (r, q, T_1, T) (voir §4.2). En cas de zero remboursement de groupe, la même durée de la phase d'exclusion, T de prêt individuel, sera appliquée pour les deux membres de groupe. Si on note (r_1, T) le contrat optimal de prêt individuel[4], alors les variables du contrat groupé (r, q et T_1) se trouvent comme suivant : $r \in [0, r_1]$, $q \in [0, 1 + r]$ et $T_1 \in [0, T]$. Le but de cette section est trouvé un contrat optimal (r^*, q^*, T_1^*) qui maximise le profit, $W_s(B^1)$, d'un emprunteur participant à ce type d'activité sous les contraintes (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) et (4.4.4).

Le contrat optimal est la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} (r^*, q^*, T_1^*) \in C, \\ J(r^*, q^*, T_1^*) = \max\limits_{(r,q,T_1) \in C} J(r, q, T_1) \\ C = \{(r, q, T_1) \in K; h_1(r, q, T_1) \geqslant 0, h_2(r, q, T_1) \geqslant 0\, h_3(r, q, T_1) \geqslant 0\} \end{cases}$$

où

$K = [0, r_1] \times [0, 1 + r_1] \times [0, T]$

$J(r, q, T_1) = \dfrac{\alpha[w - (1 + r) - (1 - \alpha)q]}{1 - [\alpha\delta + (1 - \alpha)(\alpha\delta^{T_1} + (1 - \alpha)\delta^T)\Sigma]}$ est le revenu espéré d'un bénéficiaire d'un prêt.

$h_1(r, q, T_1) = \alpha(1 + r) + \alpha(1 - \alpha)q - (1 + z)$ est la contrainte de durabilité

$h_2(r, q, T_1) = (\delta - \Sigma\delta^{T_1})J(r, q, T_1) - (1 + r)$ est la première contrainte d'empêchement de la stratgie de défaut.

$h_3(r, q, T_1) = (\delta - \Sigma\delta^T)J(r, q, T_1) - (1 + r + q)$ est la deuxième contrainte d'empêchement de la stratgie de défaut.

Pour résoudre ce problème, on suit les mêmes techniques de la section (3.7). Vue qu'il y a beaucoup de paramètres, je présente ci dessous un exemple.

Exemple 4.6.0.6. Dans cet exemple, je suppose que la durée de la phase d'exclusion T_1 dépend du montant du remboursement partiel, et que cette dépendance est linéaire qui vérifie :

$$T_1 = T_1(q) = -\frac{T}{1 + r}q + T$$

ce qui revient à dire :

1. Si le remboursement partiel est nul ($q = 0$), alors je prends la durée d'exclusion T_1 égale à T périodes.

[4] (r_1, T) n'est autre que (r^*, T^*) du (§3.7).

2. Si le remboursement partiel couvre le montant total du prêt ($q = 1 + r$), i.e. remboursement totale de la part du groupe, alors les deux membres bénéficieront de nouveaux prêts la période suivante ($T_1 = 0$).

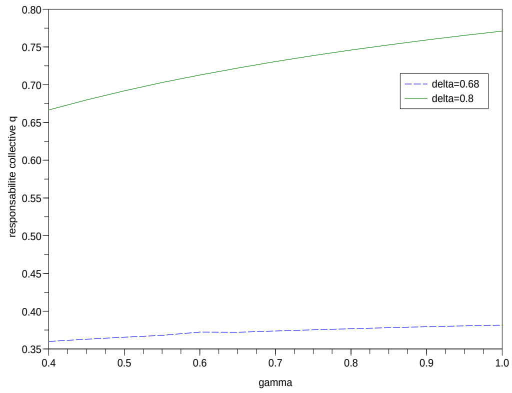

FIG. 4.2. Variation de q optimal.

Ainsi, pour $T_1 = T_1(q) = -\frac{T}{1+r}q + T$, et par un code mathématica, je calcule le contrat optimal qui maximise le profit d'un emprunteur participant à ce type d'activité sous les contraintes (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) et (4.4.4) et ceci en fixant les valeurs de paramètres[5] comme suivant :

1. pour les Figs. 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5, je suppose que $\alpha = 0.9$, $z = 0.1$ et $w = 2.5$, et je trace le contrat optimal en fonction de γ.
2. pour les Figs. 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9, je suppose que $\alpha = 0.9$, $\gamma = 0.5$ et $w = 2.5$, et je trace le contrat optimal en fonction de z.

Fig 4.2 représente la variation de q optimal en fonction de γ. La courbe le plus haut correspond à la valeur $\delta = 0.68$, et le plus bas correspond à $\delta = 0.8$. On remarque que le montant de la coopération, q, est croissante en fonction de γ. Fig 4.3 représente la décroissance de taux d'intérêt optimal en fonction de γ, encore elle montre que le taux d'intérêt du prêt groupé est inférieur à celui du prêt individuel. Fig 4.4 et 4.5 représentent les variations des durées des phases d'exlcusion en fonction de γ. on constate qu'une augmentation de δ entraine une diminution des durées des phases d'exclusion.

[5]Ces valeurs de paramètres sont prises de l'article de Tedeschi [19].

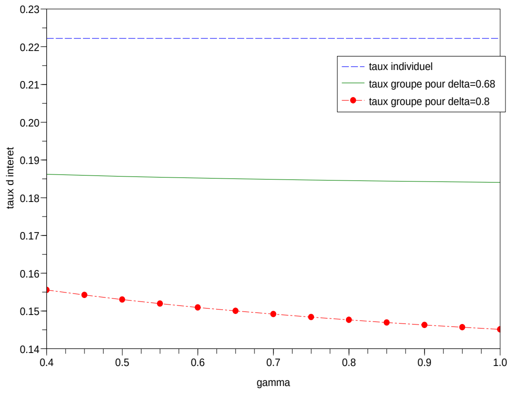

FIG. 4.3. Les taux d'intérêt en cas individuel et groupé

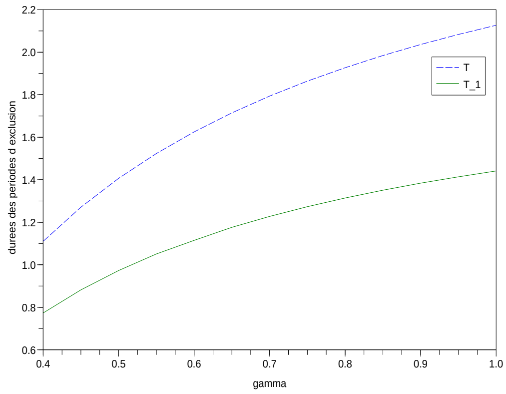

FIG. 4.4. Les durées des phases d'exclusion, T et T_1, pour $\delta = 0.68$.

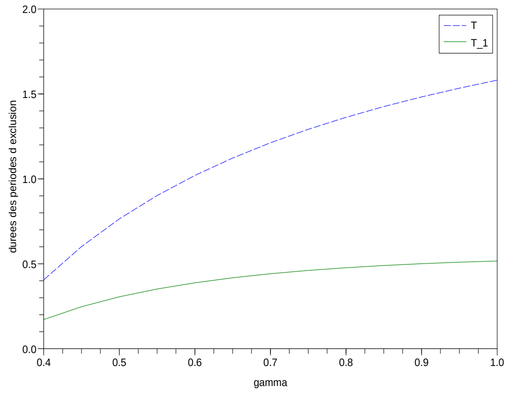

FIG. 4.5. Les durées des phases d'exclusion, T et T_1, pour $\delta = 0.8$

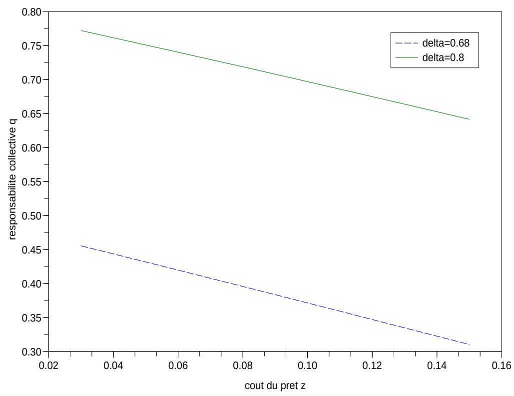

FIG. 4.6. Variation de q optimal.

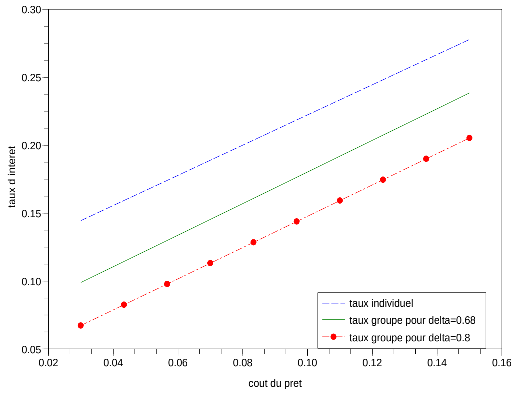

FIG. 4.7. Les taux d'intérêt en cas individuel et groupé.

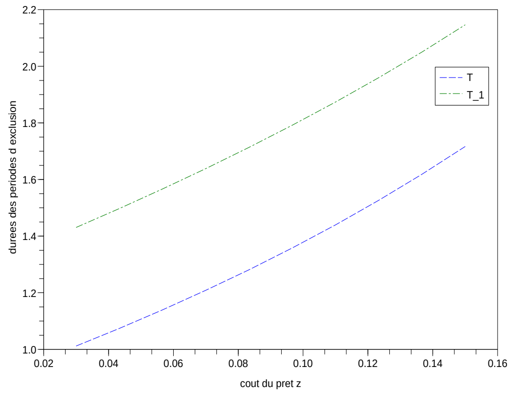

FIG. 4.8. Les durées des phases d'exclusion, T et T_1, pour $\delta = 0.68$.

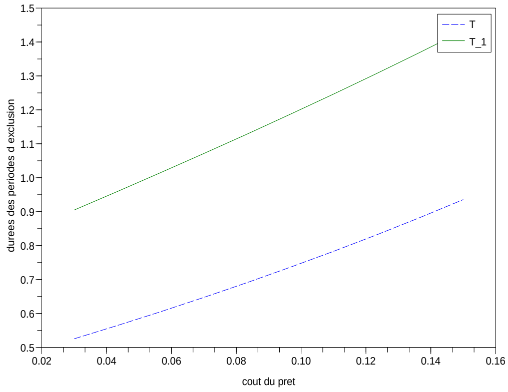

FIG. 4.9. Les durées des phases d'exclusion, T et T_1, pour $\delta = 0.8$.

4.7 Distribution stationnaire de la population

Dans cette section, on calcule, d'abord, l'évolution de la distribution de population suivant les différents états B^2, B^1, E^T, ... Après, une fois qu'on a la distribution d'équilibre, on compare la proportion des bénéficiaires dans la distribution d'équilibre de ce modèle avec celle du modèle individuel du (§3.5 du chapitre 3).

Proposition 4.7.0.7. *Pour toute distribution initiale* $\Pi_0 = (\Pi_0^1, \Pi_0^2, \cdots, \Pi_0^{T+2})$*, suivant les différents états, la dynamique markovienne,* $(\Pi_0 P^t)_{t\in\mathbb{N}}$*, tend vers la distribution* Π_* *quand* t *tend vers l'infini, où*

$$\Pi_* = \frac{1}{D}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}, 1+\alpha, \underbrace{1-\alpha, 1-\alpha, \cdots, 1-\alpha}_{(T-T_1)}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{(T_1-1)}, \frac{1}{\gamma}\right)$$

avec $D = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\gamma} + (T_1 - 1) + (1-\alpha)(T - T_1)$

Démonstration. La chaine de Markov définit dans ce modèle, qui décrit les états d'un emprunteur, est une chaine irréductible et apériodiques. En effet, pour $N_0 = Max\{T_1, T - T_1\}$, on a P^{T+N_0-1} a tous ses coefficients strictement positifs (ça se démontre par recurrence). Donc les hypothèses du théorème (2.2.6.8) sont satisfaites. Alors, Π_* est la distribution stationnaire de cette chaine de Markov, où Π_* est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Pi P &= \Pi \\ |\Pi| &= 1 \end{cases}$$

□

Corollaire 4.7.0.8. *A l'équilibre, et sous l'hypothèse* $T_1 < T$*, la proportion des bénéficiaires est plus intéressante en cas groupé qu'en cas individuel.*

Démonstration. A l'équilibre, la proportion des bénéficiaires dans la portefeuille de population, en cas groupé, est la somme $\Pi_*^1 + \Pi_*^2$ de deux premiers composants de Π_*. En comparant cette somme avec la proportion des bénéficiaires en cas individuel qui est π_*^1, le premier composante de π_*, on conclut que si $T_1 < T$ alors

$$\Pi_*^1 + \Pi_*^2 > \pi_*^1$$

□

Généralisation pour un groupe de n emprunteurs

Dans la première partie de ce chapitre, on a étudié un modèle d'un groupe constitué de deux emprunteurs qui représentent le même niveau de risque. En pratique, un groupe peut être constitué de plus de deux personnes, par exemple cinq personnes en cas de Grameen Bank, un groupe peut être aussi petit que trois personnes en cas de BancoSol, et en cas de FINCA le groupe est constitué de dix à quinze personnes. Alors, dans cette partie, on généralise notre modèle pour décrire le cas d'un groupe constitué de n emprunteurs, $n \geq 2$, et on cherche la valeur optimale du nombre de personnes n dans un groupe, qui maximise le profit de l'emprunteur.

4.8 Modèle pour un groupe de n emprunteurs

On suppose qu'un groupe est constitué de n emprunteurs identiques (leurs projets sont identiques), qui présentent le même niveau de risque[6]. Au début de l'activité, un prêt de n unités est distribué pour les membres, une unité pour chacun. Chaque emprunteur investit dans son propre projet. On suppose que chaque unité investie réalise un revenu w en cas de succès, tandis que le revenu est nul en cas d'echèc. Le revenu de chaque projet est indépendant des autres.

Dans les deux modèles précédents, ainsi que dans ce modèle, la dynamique est basé sur l'interaction répétée entre le prêteur et l'emprunteur qui se présente par l'accès à un futur prêt en cas de remboursement, et en revanche l'exclusion du droit de prêt en cas de défaillance. Les hypothèses suivantes décrivent les procédures appliquées pour ce type de prêt :

- **(H5).** Un groupe est constitué de n emprunteurs identiques, où α est la probabilité de réussite de chaque projet. En cas de remboursement total de la somme $n(1+r)$, tous les membres bénéficieront automatiquement d'un nouveau prêt, une unité pour chacun, pour un nouveau investissement. Je suppose, en plus, que le nombre des emprunteurs en succès, dans un groupe, suit une loi binomiale de paramètres n et α.
- **(H6).** En cas de zero remboursement du groupe, tous les membres du groupe seront exclus et n'auront pas le droit d'avoir un nouveau prêt pour certains temps. Dans ce cas, la durée de la phase d'exclusion est T périodes[7].
- **(H7).** En cas mixte, où le groupe contient des emprunteurs en succès et d'autres en échèc, on suppose que, pour chaque période de prêt, l'emprunteur en succès doit rembourser non seulement son prêt (1+r) mais encore un montant q pour chaque projet en echèc. Et à la période suivante, celui qui a remboursé sera bénéficiaire d'un nouveau prêt, tandis que celui qui a fait défaut sera exclu et n'aura pas le droit d'avoir un nouveau prêt durant les T_1 périodes suivantes, $T_1 \leqslant T$ à cause de la somme versée par les partenaires[8].
- **(H8).** Egalement comme dans le modèle individuel, on suppose qu'un exclu revient toujours en reclamant un nouveau prêt qu'il obtient avec la probabilité γ à la première

[6]Dans le modèle d'un groupe de deux personnes, on a illustré le fait que les deux membres d'un groupe représentent le même niveau de risque. Ici, on généralise ce raisonnement pour un groupe de n emprunteurs identiques.

[7]En cas de zero remboursement de la part du groupe, la responsabilité jointe ne joue aucun rôle positif. Dans ce cas, on suppose que la durée de la phase d'exclusion, pour chaque membre du groupe, est la même pour un défaillant d'un prêt individuel.

[8]Notons ici que les variables r, q et T_1 sont différents du modèle d'un groupe de deux personnes.

période qui suit la phase d'exclusion[9] , ou avec la probabilité $\gamma(1-\gamma)$ qu'il obtient à la deuxième période qui suit la phase l'exclusion, et ainsi de suite...

Puisque chaque projet est indépendant des autres, alors par une chaîne de Markov, $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, on représente les différents états d'un participant à ce type d'activité, avec H est l'ensemble des états :

$$H = \{B^{n-1}, \dots, B^0, E^T, \dots, E^{T_1}, \dots, E^1\} \tag{4.8.1}$$

Pour $i = 0, \dots, n-1$, B^i représente l'état d'un bénéficiaire ayant un projet en succès dans un groupe de i projets en echèc, en autre termes c'est le cas d'un bénéficiaire d'un nouveau prêt après avoir remboursé son prêt de la préiode d'avant chargé de iq. En revanche, E^j représente l'état de quelqu'un qui lui reste, encore, j periodes d'exclusion , $j = 1, \dots, T$.

Sous les hypothèses **(H5)**, **(H6)**, **(H7)** et **(H8)**, on a les probabilités de passage entre les différents états, $p_{xy} = P[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$ sont tels que :

$$p_{xy} = \begin{cases} \alpha C_{n-1}^{j} \alpha^{n-1-j}(1-\alpha)^j & \text{pour } (x,y) = (B^i, B^j),\ i,j = 0,\dots,n-1 \\ (1-\alpha)^n & \text{pour } (x,y) = (B^i, E^T),\ i = 0,\dots,n-1 \\ (1-\alpha)(1-(1-\alpha)^{n-1}) & \text{pour } (x,y) = (B^i, E^{T_1}),\ i = 0,\dots,n-1 \\ 1 & \text{pour } (x,y) = (E^m, E^{m-1}),\ m = 2,\dots,T \\ \gamma & \text{pour } (x,y) = (E^1, B^0) \\ 1-\gamma & \text{pour } (x,y) = (E^1, E^1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

4.9 Profit d'un participant

On s'intéresse dans cette paragraphe au calcule du profit d'investissement pour un participant à ce type d'activité. D'abord on calcule le profit d'une période d'investissement pour un individu du groupe, où le groupe est constitué de n emprunteurs identiques. Après, et comme il s'agit d'une interaction répétée entre l'emprunteur et le prêteur, on peut donc évaluer le revenu intertemporel espéré, pour un participant.

4.9.1 Revenu d'une période de prêt

On suppose que le rendement d'une unité empruntée est w en cas de succès et nul en cas d'echèc[10]. Un emprunteur en succès va rembourser, en plus de son prêt, un montant q pour chaque projet partenaire en défaut. Or, comme on a supposé **(H5)** que le nombre de défaillant en groupe suit une loi binomiale, alors le revenu espéré d'une période d'investissement d'une unité, pour un emprunteur de type α, est :

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \alpha^{n-1-k}(1-\alpha)^k [w - (1 + r + kq)]$$

[9]Ici je suppose que le fait de redevenir bénéficiaire après le passage dans une phase d'exclusion c'est le fait d'être dans l'état B^0.

[10]Comme les deux modèles précédents, le même rendement d'une unité investie.

4.9.2 Revenu total espéré

Les incitations dynamiques qu'on utilise dans ce modèle, ainsi dans les deux modèles précédents consistent à renouveler, toujours d'une unité, le prêt pour un emprunteur ayant remboursé son prêt à l'échéance et à exclure le défaillant pour certains temps de l'activité de prêt. Cette dynamique nous permet d'évaluer le revenu total éspéré pour toutes les périodes futures d'un participant à ce type d'activité.

Soit $g : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, définit par

$$g(x,y) = \begin{cases} w-(1+r+jq) & \text{si } (x,y)=(B^i,B^j),\ \text{i,j=0,\ldots,n-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g(x, y)$ est le profit d'une période d'investissement pour un emprunteur qui passe de l'état x à l'état y.

Pour un participant X, qui est à l'état X_s en période $[s, s+1[$, on définit la fonction de son trajectoire futur par

$$G(X_s, X_{s+1}, ...) := \Sigma_{t=s+1}^{\infty} \delta^{t-s-1} g(X_{t-1}, X_t)$$

alors le revenu futur total espéré à partir de la $s$ème période d'investissement, pour un participant étant à l'état x à cette période s est défini par la fonction $U_s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$U_s(x) = \mathbb{E}[G(X_s, X_{s+1}, \ldots) \mid X_s = x]$$

Théorème 4.9.2.1. *Pour ce type de prêt groupé, où un groupe est constitué de n personnes identiques de type α et où les états d'un emprunteur sont définis par la chaîne de Markov ci dessus et la dynamique est décrite par les hypothèses **(H5)**, **(H6)**, **(H7)** et **(H8)**, le revenu futur espéré, à partir de la sème période d'investissement pour un participant état x à cette période s, est*

$$U_s(x) = \begin{cases} \frac{\alpha[w-(1+r)-(n-1)(1-\alpha)q]}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)((1-\alpha)^{n-1}\delta^T+(1-(1-\alpha)^{n-1})\delta^{T_1})\Sigma]} & \textit{si } x = B^i,\ \ i=0,\ldots,n-1 \\ \\ \frac{\alpha[w-(1+r)-(n-1)(1-\alpha)q]\delta^{i-1}\Sigma}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)((1-\alpha)^{n-1}\delta^T+(1-(1-\alpha)^{n-1})\delta^{T_1})\Sigma]} & \textit{si } x = E^j,\ \ j=1,\ldots,T \end{cases} \tag{4.9.1}$$

pour , $\Sigma = \frac{\gamma\delta}{1-\delta(1-\gamma)}$

Démonstration. Pour calculer le revenu total espéré à partir de la $s$ème période d'investissement, il suffit de le calculer à partir de la période initiale ($s = 0$). En effet par la proposition (2.2.5.2) on a $U_s(x) = U_0(x)$. Alors il nous reste à calculer $U_0(x)$ pour tout $x \in H$.
Comme $G(X_0, X_1, \ldots) = g(X_0, X_1) + \delta G(X_1, X_2, \ldots)$, alors on a

$$U_0(x) = \sum_{y \in E} [g(x,y) + \delta U_0(y)] p_{xy}$$

où $p_{xy} = P[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$ est la probabilité de passage, en une étape, de l'état x à l'état y.

Donc

$$\begin{aligned}
U_0(B^i) &= \textstyle\sum_{y\in E}[g(B^i,y)+\delta U_0(y)]p_{B^i y}\\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1}[g(B^i,B^j)+\delta U_0(B^j)]p_{B^iB^j}\\
&\quad +\textstyle\sum_{k=1}^{T}[g(B^i,E^k)+\delta U_0(E^k)]p_{B^iE^k}\\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1}[w-(1+r)-jq+\delta U_o(B^j)]\alpha p_{B^iB^j}\\
&\quad +\delta(1-\alpha)^n U_0(E^T)+\delta(1-\alpha)(1-(1-\alpha)^{n-1})U_0(E^{T_1})\\
&= [w-(1+r)-(1-\alpha)(n-1)q]+\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}\delta U_0(B^j)p_{B^iB^j}\\
&\quad +\delta(1-\alpha)[(1-\alpha)^{n-1}U_0(E^T)+(1-(1-\alpha)^{n-1})U_0(E^{T_1})]
\end{aligned}$$

cela signifie que l'espérance de revenu futur est le même pour tous les états B^i, $i=0,\dots,n-1$. Soit $U_0(B^0)$ cette valeur.
De plus, on a

$$U_0(E^j)=\delta U_0(E^{j-1}),\ \text{pour tout } j=2,\dots,T$$

et

$$U_0(E^1)=U_0(B^0)\Sigma,\ \text{avec } \Sigma=\frac{\gamma\delta}{1-\delta(1-\gamma)}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
U_0(B^0) &= \alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)(n-1)q]+\alpha\delta U_0(B^0)\\
&\quad +(1-\alpha)[(1-\alpha)^{n-1}\delta^T+(1-(1-\alpha)^{n-1})\delta^{T_1}]U_0(B^0)\Sigma
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.9.2.2. *Pour deux types de contrats, individuel (r,T) et groupé de n emprunteurs (r,q,T_1,T), chargés du même taux d'intérêt r, un emprunteur préfére un contrat groupé, si et seulement si, la valeur de q est assez petite, i.e. pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, il existe un seuil q_n, tel que si q est supérieur (resp. inférieur) à cette valeur, alors le contrat individuel (resp. le contrat groupé) est plus rentable.*

Démonstration. Soient $V=\dfrac{\alpha[w-(1+r)]}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)\delta^T\Sigma]}$

et
$U=\dfrac{\alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)(n-1)q]}{1-[\alpha\delta+(1-\alpha)((1-\alpha)^{n-1}\delta^T+(1-(1-\alpha)^{n-1})\delta^{T_1})\Sigma]}$

où V représente le revenu espéré pour un bénéficiaire d'un contrat individuel (r,T), et U représente le revenu espéré pour un bénéficiaire d'un contrat groupé de n personnes (r,q,T_1,T).

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit q_n la valeur de q qui vérifie $U - V = 0$. on a

$$q_n = [w - (1+r)]\frac{(1-(1-\alpha)^{n-1})(\delta^{T_1} - \delta^{T})\Sigma}{(n-1)(1-(\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^{T}\Sigma))}$$

De plus, comme le revenu d'un participant au cas groupé est une fonction décroissante en q, il en résulte que pour chaque n, $U - V \geq 0$ si et seulement si $q \leqslant q_n$. $\square$

4.10 Proportions des différents états à l'équilibre

On étudie ici l'évolution de la distribution de population suivant les différents états, $B^0, \dots, B^{n-1}, E^T, \cdots,$ de la chaine de Markov.
Pour P_n la matrice de transition de cette chaine de Markov, on a :

Proposition 4.10.0.3. *Pour toute distribution initiale* $\Pi_{0,n} = (\Pi^1_{0,n}, \Pi^2_{0,n}, \cdots, \Pi^{n+T}_{0,n})$*, suivant les différents états, la dynamique Markovienne* $(\Pi_{0,n}P^t_n)_{t\in\mathbb{N}}$*, tend vers la distribution* $\Pi_{*,n}$ *quand* t *tend vers l'infini, où*

$$\Pi_{*,n} = \frac{1}{D}(\Pi^1_{*,n}, \Pi^2_{*,n}, \cdots, \Pi^{n+T}_{*,n})$$

pour

$$\Pi^j_{*,n} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} & \textit{pour } j = 1 \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha} C^j_{n-1}(1-\alpha)^j \alpha^{n-1-j} & \textit{pour } j = 2, \dots n \\ (1-\alpha)^{n-1} & \textit{pour } j = n+1, \dots, n+T-T_1 \\ 1 & \textit{pour } j = n+T-T_1+1, \dots, n+T-1 \\ \dfrac{1}{\gamma} & \textit{pour } j = n+T \\ - & \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration se fait de la même manière que la proposition (4.7.0.7). En effet, si P_n est la matrice de transition de cette chaine de Markov définie par les probabilités de transition de la paragraphe (4.8) ci-dessus, alors $P_n^{T+N_0-1}$ a tous ses coefficients strictement positives (par recurrence, où $N_0 = Max(T_1, T - T_1)$). Donc cette chaine de Markov est irréductible et apériodique. Parsuite les hypohtéses du théorème 2.2.6.8 sont bien satisfaites et on obtient le résultat. Ici $\Pi_{*,n}$ est bien la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Pi P_n &= \Pi \\ |\Pi| &= 1 \end{cases}$$

$\square$

Remarque 4.10.0.4. A l'équilibre, tant que $T_1 \leqslant T$, la proportion des bénéficiaires en cas groupé (n emprunteurs en groupe) est supérieur à celle du cas individuel. En effet, la proportion des bénéficiaires est la somme de n premiers coefficients de $\Pi_{*,n}$. Pour obtenir le resultat il suffit de comparer les proportions des bénéficiaires dans les deux cas, individuel et goupé (n emprunteurs en groupe).

4.11 Nombre optimal de participants dans un groupe

4.12 Résumé

Dans ce chapitre, on a introduit un modèle mathématique qui décrit une méthode de prêt groupé en microfinance, où les prêts sont accordés en groupes et les membres sont responsables pour les prêts les uns des autres. Cette méthode de prêt utilise l'esprit des prêts successifs comme incitations au remboursement. Sous quelques hypothèses décrivant les régles de cette méthode de prêt, d'abord, par une chaine de Markov on a représenté les différents états d'un participant à ce type d'activité. Après, on a calculé le profit d'un participant et la distribution, à l'équilibre, suivant les différents états. On remarque que, sous la condition "profit nul pour le prêteur", un participant à ce type de prêt profite d'un taux d'intérêt plus bas qu'un participant au méthode de prêt individuel décrite au chapitre précédent. Encore, on constate que, sous quelques conditions, un bénéficiaire d'un tel prêt groupé est plus profitable qu'un bénéficiaire d'un prêt individuel.

Conclusion et perspectives

Malgré sa évolution durant les trente dernières années, l'activité de microcrédit est encore peu étudiée sous une base mathématique. Dans cette thèse, on a abordé deux modèles mathématiques simplifiés décrivant deux méthodes de prêt, individuel et groupé, utilisés en microcrédit.

Le premier modèle décrit une méthode de prêt individuel où chaque emprunteur est le seul responsable de son prêt. Ce modèle représente une approche mathématique du modèle présenté par l'economiste G.A. Tedeschi [19]. L'étude est basé sur l'interaction répétée entre l'emprunteur et le prêteur, également connue sous le nom *incitation dynamique*. Le pricinpe de cette dynamique consiste à renouveler le prêt pour l'emprunteur ayant remboursé à l'échéance, et en revanche, à exclure de droit de prêt (pour certain temps) le défaillant.

Le deuxième modèle traite une technologie de prêt groupé, où les emprunteurs se mettent en groupe et se partagent la responsabilité de remboursement. Il représente une extension du premier modèle, mais en plus, il prend en compte la responsabilité de coopération entre les emprunteurs.

En termes de réussite des systèmes de prêt groupé et sous certaines circonstances, on a montré, d'abord, qu'un emprunteur peut être plus rentable en participant à la méthode de prêt groupé. Ensuite et à l'équilibre, la proportion des bénéficiaires d'un prêt groupé est plus élevée que celle d'un prêt individuel. En outre, un emprunteur peut être plus rentable en participant à la méthode de prêt groupé. Et comme vue dans les contraintes des modèles individuel et groupé, l'institution de microfinance pourrait pratiquer un taux d'intérêt plus bas en cas groupé qu'en cas individuel.

Dans les deux modèles, on a supposé que le renouvellement du prêt, en cas de remboursement, se fait automatiquement du même montant de prêt que la période d'avant. Comme montré par plusieurs économistes (voir [14] et [15]) que l'augmentation de la taille de prêt améliore l'incitation chez l'emprunteur à rembourser, le (§3.8 Chapitre 3) ouvre des nouvelles perspectives pour la poursuite de ces travaux, où la taille de prêt et le montant de taux d'intérêt peuvent être ajuster à chaque période de prêt et cet ajustement depend du comportement de l'emprunteur durant les périodes passées.

Bibliographie

[1] C. Ahlin and R. M. Townsend. Using repayment data to test across models of joint liability lending. *The Economic Journal*, 117 :11–51, 2007.

[2] B. Armendariz de Aghion and J. Morduch. Microfinance beyond group lending. *Economics of Transition*, 8 :401 – 420, 2000.

[3] T. Besley. Savings credit and insurance. *Handbook of Development Economics*, III :2123–2207, 1995. Holland : Amsterdam.

[4] T. Besley and S. Coate. Group lending, repayment incentives and social collateral. *Journal of Development*, 6 :1–18, 1995.

[5] E. Çinlar. *Introduction To Stochastic Processes*. Prentice-Hall, 1975.

[6] E. Duflo. *La politique de l'autonomie. Lutter contre la pauvreté (II).* La République des Idées / Seuil, 2010.

[7] D. Flipo. Chaines de markov. Cours agrégation de mathématiques, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Technologies de Lille.

[8] M. Ghatak. Group lending, local information and peer selection. *Journal of Development Economics*, 60(1) :27–50, 1999.

[9] M. Ghatak and T. Guinnane. The economics of lending with joint liability : theory and practice. *Journal of Development Economics*, 60 :195–228, 1999.

[10] S. Ghosh and E. Van Tassel. Microfinance, subsidies and dynamic incentives. Working Papers 07001, Department of Economics, College of Business, Florida Atlantic University, Nov 2007.

[11] E. Green and R. Proter. Non-cooperative collusion under imperfect price information. *Econometrica 52*, pages 97–100, 1984.

[12] R.T. Haftka and Z. Gurdal. *Elements of structural optimisation*. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[13] J. B. Hiriart-Urruty. *L'Optimisation*. Paris :Presses universitaires de France, 1996.

[14] D. Hulme and P. Mosley. *Finance Against Poverty*. Routledge, New York, 1996.

[15] S. Jain and G. Mansuri. A little at a time : the use of regularly scheduled repayments in microfinance. *Journal of Development Economics*, 72(1) :253 – 279, 2003.

[16] J. Morduch. The microfinance promise. *Journal of Development Literature*, 37(4) :1569 – 1614, 1999.

[17] J. L. Rodriguez-Meza. *Group and Individual Microcredit Contracts : A Dynamic Numerical Analysis*. PhD thesis, The Ohio State University, 2000.

[18] J.E. Stiglitz. Peer monitoring and credit markets. *World Bank Economic Review*, 4(3) :351–366, 1990.

[19] G. A. Tedeschi. Here today, gone tomorrow : Can dynamic incentives make microfinance more flexible ? *Journal of Development Economics*, 80 :84 – 105, 2006.

[20] B. Venet. Le microcrédit dans les pays en développement : aspects théoriques et empiriques. Cours, Université Paris IX Dauphine, Dec 2004.

[21] M. Yunus. *Vers un monde sans pauvreté*. Jean-Claude Lattès, 1997.