Valeur espérée d'un microcrédit dans un modèle de chaîne de Markov

Francine Diener, Marc Diener, Nahla Dhib

June 25, 2012

On doit à G.A. Tedeschi [3] l'idée d'évaluer la valeur espérée de la somme des flux issus pour un emprunteur d'une activité fondée sur un micro crédit. Elle produit un calcul astucieux que nous avons retrouvé dans une présentation sous forme d'une chaîne de Markov de son modèle [1]. D'autres modèles markoviens ont depuis été introduits par Osman Khodr [2] et Nahla Dhib dans le but de saisir d'autres particularités du microcrédit. De manière à faciliter le calcul de cette valeur intertemporelle espérée nous proposons ici une formule pour un modèle markovien général de microcrédit.

Définition : On appelle modèle markovien de microcrédit la donnée de quatre objets, notés $\mathcal{E}$, P, f, δ qui sont :

1. un ensemble fini d'*états* $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ d'un processus de Markov $(X_t)_{t=0,1,\ldots}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$,
2. une matrice de transition $P = (p_{xy})_{(x,y)\in\mathcal{E}^2}$, $p_{xy} = \mathbb{P}(X_t = y | X_{t-1} = x)$,
3. une fonction de *flux financiers* $f\ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ représentant le flux net (profit ou perte) perçu à la date t par l'emprunteur pour son activité liée au prêt obtenu à la date $t-1$, dans le cas où $X_{t-1} = x$ et $X_t = y$,
4. un facteur d'actualisation $\delta \in]0, 1[$ représentant la valeur, à $t-1$, d'un flux financier 1 perçu à la date t.

Ainsi, pour une suite d'états $x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t, \ldots$, le flux total après la date s, actualisé à cette date, est

$$F_s(x) = \delta f(x_s, x_{s+1}) + \delta^2 f(x_{s+1}, x_{s+2}) + \ldots = \sum_{t>s} \delta^{t-s} f(x_{t-1}, x_t) \tag{1}$$

et le flux total espéré, après la date s, dans l'état $x \in \mathcal{E}$, est le nombre

$$W_s(x) = \mathbb{E}(F_s(X)|X_s = x) = \mathbb{E}\left(\sum_{t>s} \delta^{t-s} f(X_{t-1}, X_t) \,\middle|\, X_s = x\right). \tag{2}$$

Nous donnons ici une expression de la valeur du vecteur

$$W_s = {}^t(W(E_1), \ldots, W(E_n)).$$

Le processus $(X_t)_{t=0,1,\ldots}$ est markovien et donc pour tout s et toute fonction Φ, si on dénote par $\mathcal{F}_s^X$ la valeur à la date s de la filtration associée au processus $X = (X_s)_{s=0,1,\ldots}$ (ou *information disponible sur ce processus à la date* s), on a $\mathbb{E}(\Phi(X_s, X_{s+1}, \ldots)|\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(\Phi(X_s, X_{s+1}, \ldots)|X_s) = \varphi(X_s)$ avec $\varphi(x) = \mathbb{E}(\Phi(X_s, X_{s+1}, \ldots)|X_s = x)$, et en particulier

$$\mathbb{E}(F_s(X)|\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(F_s(X)|X_s). \tag{3}$$

On en déduit que $W_s(x) = W_0(x)$ pour tout temps s et tout état x. Nous écrirons donc simplement W pour W_s. Notons que Tedeschi et Khodr préfèrent considérer $V(x) := \frac{1}{\delta} W(x)$.

Pour nous permettre d'énoncer le résultat en vue il convient de définir un dernier vecteur, Z : celui des flux espérés sur la première période à venir. Pour tout état $x \in \mathcal{E}$ soit $Z(x) = \mathbb{E}(f(X_0, X_1)|X_0 = x)$ et soit $Z = {}^t(Z(E_1), \ldots, Z(E_n))$.

Théorème 1 *Le vecteur des flux totaux espérés selon l'état initial est donné par*

$$W = \delta(\mathbb{I} - \delta P)^{-1} Z = \delta\left(\sum_{t=0}^{\infty} (\delta P)^t\right) Z, \tag{4}$$

et donc $V = \frac{1}{\delta} W = (\mathbb{I} - \delta P)^{-1} Z = \left(\sum_{t=0}^{\infty} (\delta P)^t\right) Z$.

Preuve : Par définition, pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned}
W(x) &= W_0(x) = \mathbb{E}\left(\delta(f(X_0, X_1) + \sum_{t>1} \delta^t f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_0 = x\right) \\
&= \delta Z(x) + \delta \mathbb{E}\left(\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_0 = x\right) \\
&= \delta Z(x) + \delta \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(F_1(X)|\mathcal{F}_1^X)\middle| X_0 = x\right) \\
&\quad \text{(en réutilisant la notation (1) } F_1(X) = \textstyle\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t)) \\
&= \delta Z(x) + \delta \sum_{y\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(F_1(X)|X_0 = x, X_1 = y)\mathbb{P}_{X_0=x}(X_1 = y) \\
&= \delta Z(x) + \delta \sum_{y\in\mathcal{E}} p_{xy} \mathbb{E}\left(\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_0 = x, X_1 = y\right) \\
&= \delta Z(x) + \delta \sum_{y\in\mathcal{E}} p_{xy} \mathbb{E}\left(\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_1 = y\right) \\
&\quad \text{(puisque } (X_s)_{s=0,1,\ldots} \text{ est une chaîne de Markov et que } t > 1) \\
&= \delta Z(x) + \delta \sum_{y\in\mathcal{E}} p_{xy} W_1(y) = \delta Z(x) + \delta \sum_{y\in\mathcal{E}} p_{xy} W(y).
\end{aligned}$$

Donc, en introduisant les vecteurs $W = {}^t(W(E_1), \ldots, W(E_n))$ et $Z = {}^t(Z(E_1), \ldots, Z(E_n))$, nous voyons que $W = \delta Z + \delta PW$, ou encore $(\mathbb{I} - \delta P)W = \delta Z$. A présent, comme $\|\delta P\| = |\delta|\|P\| = \delta \cdot 1 < 1$, nous voyons que $(\mathbb{I} - \delta P)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} (\delta P)^t$ existe, d'où (4) et le théorème 1.

□

References

[1] F. Diener, M. Diener, O. Khodr, and P. Protter. Mathematical models for microlending. In *Proceedings of the 16th Mathematical Conference of the Bangladesh Mathematical Society*, 2009.

[2] O. Khodr. Modèles dynamiques des innovations du microcrédit. In *Thèse de Doctorat, EDSFA, Laboratoire J-A Dieudonné, UNS, Parc Valrose, 06108 Nice, France*, pages 1–61, 2011.

[3] G. A. Tedeschi. Here today, gone tomorrow : can dynamic incentives make microfinance more flexible ? *Journal of Development Economics*, 80:84–105, 2006.