Université de Nice
Nice-Polytech
NOM :
PRENOM :

Année 2014-2015
MMDFA
Date : 23 avril 2015
Groupe : .

TD 11
Equation de Yunus et taux aléatoire

On a vu l'équation de Yunus :

$$\begin{aligned} 1000 &= \sum_{k=1}^{50} 22 e^{-r s_k},\ s_k = \text{date du } k\text{-ième remboursement, en années} \\ &= 22 \sum_{k=1}^{50} q^{t_k},\ \text{avec } q := e^{-\frac{r}{52}} \text{ et } t_k = 52 s_k, \text{ date en semaines} \end{aligned}$$

A priori les remboursements sont hebdomadaires et $t_k = k$, mais la durée $x_k := t_k - t_{k-1}$ qui sépare le k-ième versement du précédent peut parfois être supérieure à 1 semaine, si la semaine n'a pas été bonne...

Pour prendre en compte ces retards éventuels, on introduit un modèle aléatoire, avec un processus de Bernoulli $(B_i)_{i=1,2,\dots}$ où les v.a. B_i sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$, où $B_i = 1$ lorsque la i-ième semaine a été bonne et a donné lieu à un remboursement (avec un probabilité p) et $B_i = 0$ sinon. On pose alors

$$\begin{aligned} T_k &= \text{Min}\,\{n \geq 1 | B_1 + \ldots + B_n = k\} \text{ date, en semaines, du } k\text{-ième remboursement} \\ &= X_1 + \ldots + X_k. \end{aligned}$$

Comme $\{X_k = x\} = \{B_{T_{k-1}+1} = 0, \dots, B_{T_{k-1}+k-1} = 0, B_{T_{k-1}+x} = 1\}$, on voit que $\mathbf{P}(X_k = x) = (1-p)^{x-1}p$, et donc $X_k \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire suit une **loi géométrique** de paramètre p. Si on remplace les t_k par des T_k aléatoires, le taux d'intérêt r devient également aléatoire, on le note R, et il vérifie l'équation de Yunus aléatoire

$$22 \sum_{k=1}^{50} Q^{T_k} = 1000 \text{ avec } Q := e^{-\frac{R}{52}} \tag{1}$$

. Dans cette séance, nous allons étudier les propriétés de ce taux aléatoire R.

1. Pour `p=0.64` générer un échantillon `x` de taille `N=1000` de nombres aléatoires distribués selon une loi géométrique au moyen de `grand(1,N,'geom',p);`. Indiquer les 10 premiers nombres trouvés, la plus grand et la plus petite des valeurs de votre échantillon et enfin sa moyenne

2. Que vaut `x(length(x));` ? Expliquer. Représenter l'histogramme de votre échantillon avec `histplot(10,x);`. Peut-on reconnaitre la loi de cet échantillon ?

3. Vérifier que l'équation de Yunus aléatoire (1) peut se réécrire

$$\frac{1000}{22} = Q^{X_1} + Q^{X_1+X_2} + \ldots + Q^{X_1+\ldots X_{49}} + Q^{X_1+\ldots X_{50}} \tag{2}$$
$$= Q^{X_1}(1 + Q^{X_2}(1 + \ldots + Q^{X_{49}}(1 + Q^{X_{50}})\ldots)). \tag{3}$$

4. Avec cette fois `p=0.84` refaire un tirage aléatoire des durées X_k pour $k = 1, ..., 50$. Expliquer pourquoi le membre de droite de l'équation (3) peut se définir par

```
Q=poly(0,"Q");
y=Q^X(length(X));
for i=length(X)-1:-1:1
y=Q^X(i)*(1+y);
end;
```

5. Trouver toutes les solutions de l'équation de Yunus aléatoire au moyen de

```
sols=roots(1000-22*y);
```

6. Quel taux d'intérêt correspond à ce tirage aléatoire des durées X_k ? Ce taux est plus petit que celui que l'on obtient lorsqu'il n'y a pas de retard. Pourquoi ?

7. Recommencer avec d'autres tirages, indiquer les taux trouvés.

8. Effectuer 100 tirages aléatoires (au moyen d'une boucle) et calculer les 100 taux d'intérêts correspondant.Expliquer votre code.

9. Calculer la moyenne de ces 100 taux et représenter leur histogramme.

10. Que trouve-t-on si la suite des X_k est la suite constante égale à 1 ? Expliquer.