Université de Nice
Département de Mathématiques

SV1, année 2008-2009
Mathématiques pour la Biologie (semestre2)

Cours 3 : Loi de conservation du système de Lotka-Volterra

Le système de Lotka-Volterra permet comme on l'a vu de modèliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Ce système possède ce que l'on appelle une *loi de conservation*, c'est-à-dire une quantité qui dépend des deux tailles de population x et y, que l'on note $H(x, y)$ et qui *reste constante sur les trajectoires de la dynamique*. En mathématique, on appelle aussi parfois une telle loi de conservation une *intégrale première*.

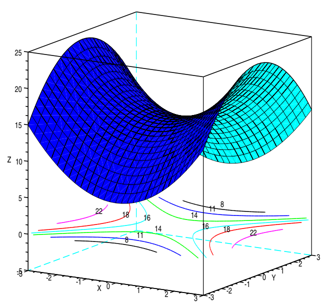
L'étude de cette fonction H sera l'occasion d'aborder la question des fonctions de plusieurs variables (ici deux variables), leurs dérivées partielles, leurs graphes (qui sont des surfaces), leurs courbes de niveau. C'est l'objet de cette leçon. On verra que l'étude de la loi de conservation du système de Lotka-Voterra fournit à elle seule tous les renseignements que l'on peut souhaiter avoir sur le comportement du système.

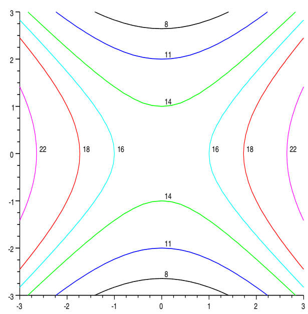
1 Courbes de niveau :

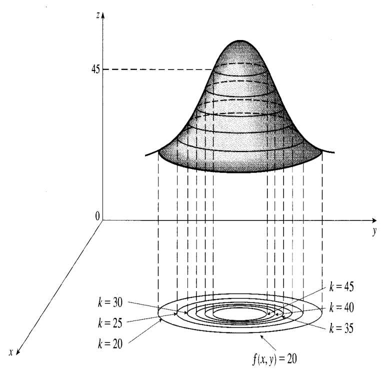
Les courbes de niveau sont en cartographie les courbes reliant les points de la carte ayant la même altitude : un chemin qui suit les courbes de niveau est à plat (il ne monte ni ne descend), s'il est tranverse aux courbes de niveau, il monte ou il descend, passant d'un niveau à un autre niveau. A coté des courbes d'égale altitude, il y a beaucoup d'autres exemples de courbes de niveau comme les courbes d'égale température (isothermes) ou d'égale pression (isobares) en météorologie.

Mathématiquement la courbe de niveau k d'une fonction f de deux variables $(x, y) \to f(x, y)$, est l'ensemble des points du plan (x, y) qui vérifient l'équation $f(x, y) = k$.

Exemple : Par exemple la courbe de niveau $k = 4$ de la fonction $f(x, y) = 3 - x - \frac{1}{2}y$ a pour équation $3 - x - \frac{1}{2}y = 4$, c'est donc la droite d'équation $y = -2x - 2$. De même la courbe de niveau $k = 100$ de la fonction $g(x, y) = x^2 + y^2$ a pour équation $x^2 + y^2 = 100$, c'est donc un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $r = 10$. Les figures suivantes montrent leur représentation graphique.







2 Dérivées partielles

Comment peut-on tracer les courbes de niveau d'une fonction donnée $f(x, y)$? En général on a recours à un logiciel[1]qui lui-même utilise pour cela les dérivées partielles de la fonction. Qu'est-ce qu'une dérivée partielle ? Si f a deux variables, x et y, on définit non plus une dérivée de f mais deux dérivées que l'on appelle *dérivées partielles :* la dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, est encore une fonction des deux variables x et y est on l'obtient en fixant la variable y, supposée constante, et en

[1]on peut recommander l'utilisation du logiciel `Scilab` qui est un logiciel libre que l'on peut télécharger à `http ://www.scilab.org/`. Les quatre lignes suivantes permettent de tracer le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2 + 13$, et, dans le plan $z = 0$, six de ses courbes de niveau (figure de gauche) :

```
deff('z=f(x,y)','z=x^2-y^2+13')
x=-3 :0.2 :3 ;y=x ;
fcontourplot2d(x,y,f,6)
fplot3d(x,y,f,alpha=80,theta=-60)
```

dérivant comme d'habitude la fonction $x \mapsto f(x,y)$ comme fonction de x seulement. On procède de la même façon pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exemple : Ainsi $f(x,y) = x^2y^2 + 3xy$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{dx}(x,y) = 2xy^2 + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + 3x.$$

Le vecteur dont les deux composantes sont les dérivées partielles de f s'appelle le *gradient* de f au point (x,y) et se note

$$\mathrm{Grad}\, f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Lorsqu'on calcule ce vecteur en un point (x,y) en remplaçant x et y par leurs valeurs on obtient un vecteur dont les deux composantes sont des nombres et qu'on peut alors tracer. Ainsi pour la fonction de l'exemple précédent, au point $(x,y) = (-1 \;\; 3)$, on obtient $\mathrm{Grad}\, f(-1,3) = (-9 \;\; 15)$ Ce vecteur joue un role important dans l'étude de la fonction f à travers la propriété suivante :

Proposition 1 *En chaque point (x,y), le vecteur gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau de la fonction, dirigé dans le sens des niveaux croissants.*

Rappelons que deux vecteurs $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont *perpendiculaires* si leur produit scalaire $v \cdot w$ est nul, c'est-à-dire si $v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. De cette proposition, on déduit qu'il est facile de calculer les coordonnées d'un vecteur $V(x,y)$ tangent à une courbe de niveau de f en un point (x,y) : il suffit de choisir un vecteur dont le produit scalaire avec le vecteur gradient est nul, comme par exemple $V(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$, puisqu'on a $V(x,y) \cdot \mathrm{Grad}\, f(x,y) = 0$.

3 Loi de conservation

Définition : Soient $((x(t), y(t))$ la dynamique de deux espèces comme par exemple les proies et les prédateurs du système de Lotka Volterra, on dit que la fonction $H(x,y)$ est une loi de conservation de cette dynamique lorsque la quantité $H(x(t), y(t))$ reste constante au cours du temps.

Par exemple si l'on considère la dynamique de l'oscillateur harmonique (déja étudiée dans la leçon 2) $(x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t)$, la fonction $H(x,y) = x^2 + y^2$ est une loi de conservation puisque $H(x(t), y(t)) = r^2$.

Dans le cas du système de Lotka-Volterra

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx(t)}{dt} & = & \alpha_1 x(t) - \beta_1 x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} & = & -\alpha_2 y(t) + \beta_2 x(t)y(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

il n'est pas difficile de vérifier que la fonction suivante est une loi de conservation :

$$H(x,y) = \alpha_1 \ln y - \beta_1 y + \alpha_2 \ln x - \beta_2 x.$$

Il suffit, pour cela, de calculer le produit scalaire du gradient de H par le champs de vecteur $(x'(t), y'(t))$ qui est donné par le système différentiel.

L'importance des lois de conservation pour l'étude des systèmes différentiels comme ceux de Lotka-Volterra est facile à comprendre. Dès que la fonction H est connue, on peut, en utilisant ses dérivées partielles, tracer ses courbes de niveau et en déduire les trajectoires de la dynamique. Alors qu'une étude qualitative permet de prévoir l'oscillation des deux populations (car les trajectoires tournent dans le plan (x,y)), elle ne permet pas de s'assurer que la dynamique est réellement périodique, c'est-à-dire que les trajectoire se referment effectivement après un tour. Au contraire cette information découle immédiatement de l'étude de H.