1

NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : .
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2-2009-2010) : Feuille-réponses du TD 10
Un modèle simplifié du switch génétique

On considère un système de 2 gènes de niveau d'exspression x et y respectivement, ayant la dynamique suivante :

$$\begin{cases} x' &= f(y) - \lambda x \\ y' &= f(x) - \mu y \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction en escalier qui modélise l'inhibition de chaque gène sur l'autre gène et où λ et μ sont des coefficients de dégradation que l'on supposera égaux à 1 pour simplifier. On suppose que $f(y)$ vaut 5 si $0 \le y < 1$ et 0 si $1 \le y < 5$.

1. Indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le carré $1 \le x < 5$, $1 \le y < 5$

$\lambda = \mu = 1$ donc

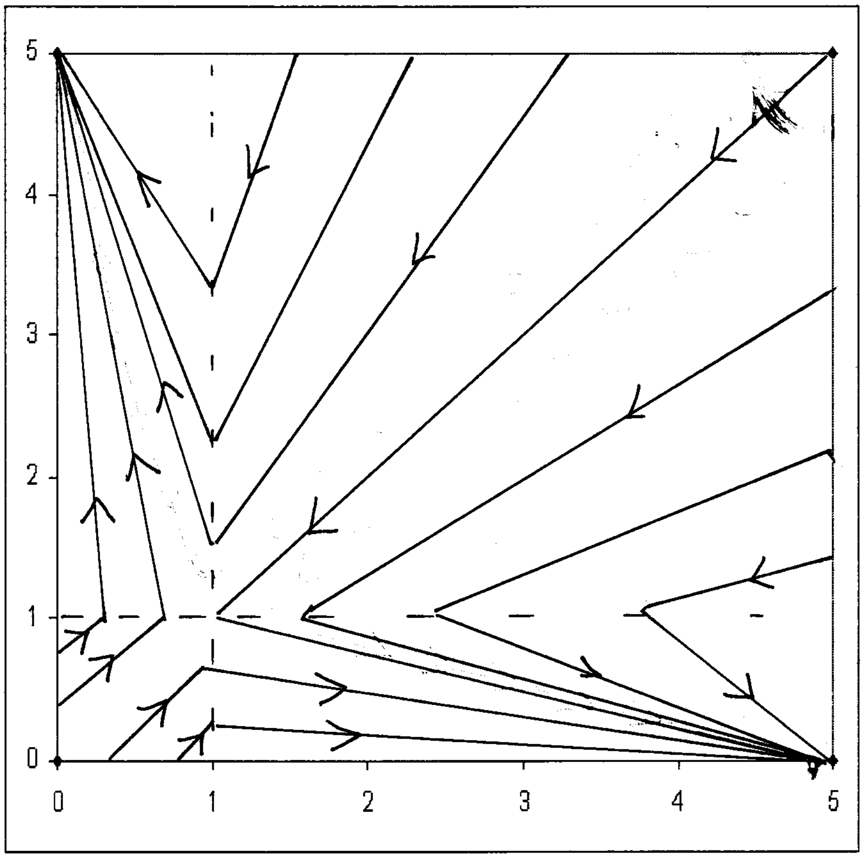
$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y \end{cases} \tag{2}$$

car dans ce carré, $f(x)$ et $f(y)$ sont nuls.

2. Vérifier que ses solutions sont de la forme ($x(t) = ce^{-t}$ et $y(t) = de^{-t}$) où c et d sont des constantes.

Si $x(t) = ce^{-t}$, $x'(t) = -c\,e^{-t}$ donc on a bien $x'(t) = -(ce^{-t}) = -x(t)$
De même $y'(t) = -de^{-t}$ donc on a bien $y'(t) = -y(t)$.

3. En déduire que les trajectoires sont des droites d'équation $y = \frac{d}{c}x$ et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire ci-dessous.



4. Vérifier que toutes les trajectoires tendent vers le point $(0,0)$ qui est un équilibre de type noeud attractif (appelé le point focal du carré).

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{-t} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} de^{-t} = 0$

Donc toutes les trajectoires tendent vers le point $(0,0)$

5. Indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le carré $0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$

$\lambda = \mu = 1$ donc
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 5-x \\ y' & = & 5-y \end{array} \right. \qquad (3)$$
car $f(x)$ et $f(y)$ valent 5 dans ce carré.

6. Vérifier que ses solutions sont de la forme ($x(t) = 5 + ce^{-t}$ et $y(t) = 5 + de^{-t}$) où c et d sont des constantes.

Si $x(t) = 5 + ce^{-t}$, $x'(t) = -ce^{-t}$ donc $5 - x(t) = 5 - (5 + ce^{-t}) = -ce^{-t} = x'(t)$.

De même $y'(t) = -de^{-t} = 5 - (5 + de^{-t}) = 5 - y(t)$.

7. En déduire que les trajectoires dans ce carré ont aussi un point focal vers lequel elles tendent et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire dans la figure ci-dessus.

Le point focal vers lequel les trajectoires de ce carré tendent est le point $(5, 5)$.

8. Reprendre les questions précédentes pour les deux rectangles restant et compléter le tracé des trajectoires dans la figure ci-dessus.

Dans le rectangle $1 < x < 5$, $0 < y < 1$, le système s'écrit
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 5 - x \\ y' = -y \end{array} \right.$$
Ses solutions $x(t) = 5 + ce^{-t}$ et $y(t) = +de^{-t}$ tendent vers le point focal $(5; 0)$ quand $t \to \infty$.

Dans le rectangle $0 < x < 1$, $1 < y < 5$, le système s'écrit
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = 5 - y \end{array} \right.$$
Ses solutions $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = ce^{-t} \\ y(t) = 5 + de^{-t} \end{array} \right.$ tendent vers le point focal $(0; 5)$ quand $t \to \infty$.

9. On suppose que des perturbations extérieures (comme par exemple une induction chimique ou thermique) font passer le système de l'état initial ($x_0 = 5$, $y_0 = 4.5$) à l'état initial ($x_0 = 4.5$, $y_0 = 5$). Pensez-vous que ces perturbations modifieront sensiblement l'évolution des deux concentrations $x(t)$ et $y(t)$? Expliquer.

Oui, une telle perturbation fait passer l'état du système de l'autre coté de la "séparatrice" $y = x$ et donc au lieu de tendre vers le point d'équilibre $(5; 0)$, il va tendre vers l'autre équilibre stable $(0; 5)$.

10. Tracer les graphes $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ des deux composantes de la trajectoire issue du point ($x_0 = 5$, $y_0 = 4.5$).