NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

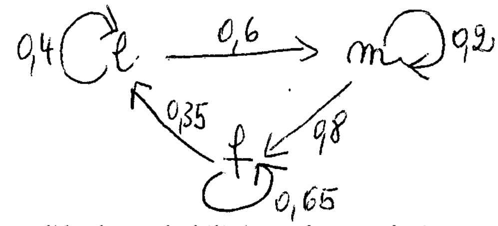
Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \ell & m & f \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \ell \\ m \\ f \end{array} \end{array}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l'état *maquis à* l'état *forêt ?*

Cette probabilité est dans la 2e ligne (m) et la 3e colonne (f) : $P(X_{t+1} = f / X_t = m) = 0,8$.

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = f, X_1 = f, X_2 = l, X_3 = f$ en fonction de $\pi_0(f)$. $P(X_0 = f, X_1 = f, X_2 = \ell, X_3 = f)$
$= P(X_0 = f)\, P(X_1 = f / X_0 = f)\ P(X_2 = \ell / X_1 = f)\, P(X_3 = f / X_2 = \ell)$
$= \pi_0(f) \cdot (0,65) \cdot (0,35) \cdot 0 = 0$

4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

La trajectoire précédente fournit un exemple.

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l à m en une étape ? en deux étapes ?

En une étape : $P(X_{t+1} = m / X_t = \ell) = 0,6$
En deux étapes : $P(X_{t+2} = m / X_t = \ell) =$
$= P(X_{t+2} = m / X_{t+1} = \ell)\, P(X_{t+1} = \ell / X_t = \ell) + P(X_{t+2} = m / X_{t+1} = m)\, P(X_{t+1} = m / X_t = \ell)$
$+ P(X_{t+2} = m / X_{t+1} = f)\, P(X_{t+1} = f / X_t = \ell)$
$= (0,4)(0,6) + (0,6)(0,2) + (0)(0) = 0,24 + 0,12 = 0,36$

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,3\ \ 0,4\ \ 0,3)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1. Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles regressent ?

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (0,3\ \ 0,4\ \ 0,3)\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \end{pmatrix} = (0,12 + 0,105\ \ \ 0,18 + 0,08\ \ \ 0,32 + 0,195)$$
$$= (0,225\ \ 0,260\ \ 0,515)$$

On remarque que la forêt progresse, passant de 30% à 51,5%, mais la lande et le maquis régressent.

Exercice 2. : On suppose[1] que l'on s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E1 et E2. Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que seuls 2% d'entre eux meurent chaque année alors que ce taux est de 4.5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 65% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 35% pour un arbre de la première espèce.

1. On modélise la dynamique de cette foret par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à deux états $E1$ et $E2$. Justifier la formule suivante $P(X_{t+1} = E_1/X_t = E_1) = 0,98 + 0,02 \cdot 0,35$ puis calculer de même $P(X_{t+1} = E_2/X_t = E_2)$.

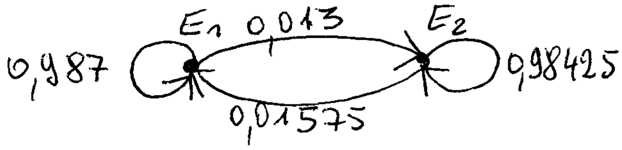
Il y a 98% d'arbres de la 1ère espèce qui survivent et parmi les 2% qui meurent 35% sont remplacés par la même espèce. Donc
$P(X_{t+1} = E_1/X_t = E_1) = 0,98 + 0,02(0,35) = 0,987$. De même :
$P(X_{t+1} = E_2/X_t = E_2) = 0,955 + (0,045)(0,65) = 0,98425$.

2. En déduire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov .

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,987 & 0,013 \\ 0,01575 & 0,98425 \end{pmatrix}$$

On a calculé p_{11} et p_{22}. Pour compléter la matrice, on se souvient que la somme des coef d'une même ligne vaut 1.

3. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



4. Si l'on commence avec une population de 100 arbres de l'espèce $E1$ et 900 de l'espèce $E2$, combien aura-t-on d'arbres de l'espèce $E1$ après une étape, après deux étapes?

$\pi_1(E_1) = \pi_0(E_1)\, P(X_1 = E_1/X_0 = E_1) + \pi_0(E_2)\, P(X_1 = E_1/X_0 = E_2)$
$= (0,1)(0,987) + (0,9)(0,01575) = 0,112\,875$
$\pi_2(E_1) = \pi_1(E_1)\, P(X_2 = E_1/X_1 = E_1) + \pi_1(E_2)\, P(X_2 = E_1/X_1 = E_2)$
$= (0,112875)(0,987) + (1 - 0,112875)(0,01575) = 0,1253798$.

5. Calculer l'image de la distribution $\pi_0 = (0,1 \quad 0,9)$ par cette chaîne de Markov.

On utilise le fait que $\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$.

$$\pi_1 = (0,1 \quad 0,9)\begin{pmatrix} 0,987 & 0,013 \\ 0,01575 & 0,98425 \end{pmatrix} = \big(0,1(0,987)+0,9(0,01575) \quad 0,1(0,013)+0,9(0,98425)\big) = (0,112875 \quad 0,887125)$$

6. Reprendre les deux dernières questions si l'on suppose qu'il y a au départ une proportion de cinq arbres de la première espèce contre trois de la seconde.

On suppose $\pi_0 = \left(\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8}\right)$. On trouve
$\pi_1(E_1) = \frac{5}{8}\, 0,987 + \frac{3}{8}\, 0,01575 = 0,6227812$
$\pi_2(E_1) = \cdots = 0,6206263$

et aussi

$$\pi_1 = \left(\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8}\right)\begin{pmatrix} 0,987 & 0,013 \\ 0,01575 & 0,98425 \end{pmatrix} = (0,6227812 \quad 0,3772187)$$

[1] Exemple extrait du livre "Mathematical Models in Biology", E.S. Allman et J.A. Rhodes, Cambridge University Press, 2004