

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 2
Evolution vers une distribution stationnaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille-réponses en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1.¹ : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état R avec une probabilité 0,1 ; étant malade, il peut le rester avec probabilité 0,2 ou devenir immunisé avec probabilité 0,8 ; enfin, étant dans l'état R , il peut le rester avec probabilité 0,5 ou devenir malade avec probabilité 0,5.

1. Décrire une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{R, M, I\}$ permettant de modéliser la population à laquelle appartient cet individu.
2. Calculer la proportion d'individus malades dans la population après un mois si 1% des individus étaient malades au départ et les autres ni malades ni immunisés.
3. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance P^{20} de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 3 premières décimales) $P^{20} = \begin{pmatrix} 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \end{pmatrix}$ En déduire la valeur approchée d'une distribution stationnaire π^* pour cette chaîne de Markov. La matrice de transition est-elle une matrice primitive ?
4. Indiquer quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme. La proportion d'individus immunisés a-t-elle diminuée ou augmentée ?
5. Que se passerait-il selon ce modèle dans une région où la proportion de malades serait de 50% au départ ? Peut-on prévoir une épidémie dans ce cas ?

¹(Exercice inspiré du texte en ligne à <http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html>)

