NOM : Corrigé   Date : .
PRENOM :   Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 2
Evolution vers une distribution stationnaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1.[1] **:** Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0, 9 ou passer à l'état R avec une probabilité 0, 1 ; étant malade, il peut le rester avec probabilité 0, 2 ou devenir imunisé avec probabilité 0, 8 ; enfin, étant dans l'état R, il peut le rester avec probabilité 0, 5 ou devenir malade avec probabilité 0, 5.

1. Décrire une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{R, M, I\}$ permettant de modéliser la population à laquelle appartient cet individu.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} R & M & I \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} R \\ M \\ I \end{array} \end{array}$$

2. Calculer la proportion d'individus malades dans la population après un mois si 1% des individus étaient malades au départ et les autres ni malades ni immunisés.

Comme $\pi_0 = (0,99 \quad 0,01 \quad 0)$ et $\pi_1 = \pi_0 P$, on a donc

$$\pi_1 = (0,99 \quad 0,01 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,495 \quad 0,497 \quad 0,008).$$ Donc la proportion après 1 mois est de 49,7%.

3. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance P^{20} de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 3 premères décimales) $\mathbb{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \\ 0,151 & 0,094 & 0,755 \end{pmatrix}$. En déduire la valeur approchée d'une distribution stationnaire π^* pour cette chaine de Markov. La matrice de transition est-elle une matrice primitive ?

On sait (d'après le cours) que les lignes de P^{20} (qui sont toutes presque égales) donnent la distribution stationnaire. Donc $\pi_* = (0,151 \quad 0,094 \quad 0,755)$. La matrice $\mathbb{P}$ est bien primitive puisque sa puissance vingtième, $\mathbb{P}^{20}$ n'a aucun coefficient nul.

4. Indiquer quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme. La proportion d'individus immunisés a-t-elle diminué ou augmenté ?

La proportion de malades à long terme est $\pi_*(M) = 0,094$.
La proportion d'immunisés à long terme est $\pi_*(I) = 0,755$.
Elle aura donc augmentée puisqu'au départ elle était nulle ($\pi_0(I) = 0$).

5. Que se passerait-il selon ce modèle dans une région où la proportion de malades serait de 50% au départ ? Peut-on prévoir une épidémie dans ce cas ?

Le théorème de Perron Frobenius indique que, quelque soit π_0, $\lim_{k \to \infty} \pi_0 P^k = \pi_*$. Donc quelqu'elle soit au départ, la proportion de malades va tendre vers 0,094, soit moins de 10%. Elle va donc plafonner et donc ce modèle ne prévoit pas d'épidémie mais plutôt une stabilisation.

[1](Exercice inspiré du texte en ligne à http ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html)

Exercice 2. : On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies, antilopes (a), gnous (g) et zèbres (z) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple (gzzaggaa). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie a (ou g ou z) après avoir mangé une proie g (ou a ou z) ne dépend que de a (ou g ou z) et non de ce qu'il avait mangé avant a (et que cette probabilité est invariante au cours du temps). D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{a, g, z\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$P(X_{t+1} = z / X_t = a)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & g & z \end{array} \\ \mathbb{P} = & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ g \\ z \end{array} \end{array}$$

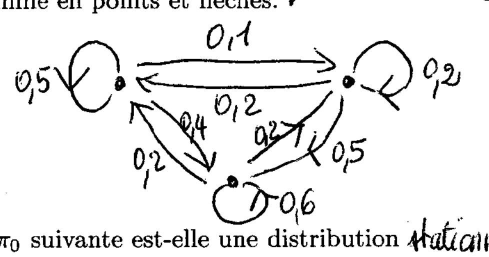
1. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

On recherche la probabilité $P(X_{t+1} = z / X_t = a)$ de passer de a à z entre l'instant t et l'instant $t+1$.
Cette probabilité est égale à 0,4, d'après la matrice $\mathbb{P}$.

2. Des deux trajectoires suivantes, $(zaag)$ et $(zaga)$, quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par un calcul.

$P(zaag) = P(X_0 = z) P(X_1 = a / X_0 = z) P(X_2 = a / X_1 = a) \; P(X_3 = g / X_2 = a)$
$= \pi_0(z)(0,2)(0,5)(0,1) = 0,01\, \pi_0(z)$
$P(zaga) = P(X_0 = z) \; P(X_1 = a / X_0 = z) P(X_2 = g / X_1 = a) P(X_3 = a / X_2 = g)$
$= \pi_0(z)(0,2)(0,1)(0,2) = 0,004\, \pi_0(z)$
Donc la trajectoire la plus probable est la 1^e trajectoire.

3. Tracer le diagramme en points et flèches.



4. La distribution π_0 suivante est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ? Justifier votre réponse.

S	a	g	z
π_0	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{21}$

On calcule le produit

$$\pi_0 \mathbb{P} = \left(\frac{6}{21} \; \frac{4}{21} \; \frac{11}{21}\right) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{21}(0,5) + \frac{4}{21}(0,2) + \frac{11}{21}(0,2) \quad \frac{6}{21}(0,1) + \frac{4}{21}(0,3) + \frac{11}{21}(0,2) \quad \frac{6}{21}(0,4) + \frac{4}{21}(0,5) + \frac{11}{21}(0,6)\right)$$

$$= \left(\frac{6}{21} \; \frac{4}{21} \; \frac{11}{21}\right) = \pi_0$$

C'est donc bien une distribution stationnaire.

5. Si dans cette portion de savane la population des antilopes est au départ bien supérieure à celle des deux autres types de proies, va-t-elle, selon ce modèle, diminuer, augmenter ou rester prépondérante ? Expliquer.

Comme $\mathbb{P}$ est primitive (aucun coef. nul), on peut appliquer le théorème de Perron-Frobenius. Donc, quelque soit la répartition initiale, la dynamique va tendre vers la répartition limite π_0. Donc en particulier la proportion d'antilopes va tendre vers $\frac{6}{21}$, soit 28,57% environ. Elle ne restera donc pas prépondérante.