NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 3
Modèles dynamiques : autres exemples

Exercice 1. : On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassins ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' & = & -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{array}\right. \tag{1}$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur*. On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Quel est, selon ce modèle, le taux de mortalité par tête des poissons ? Que représente les coefficients β_1 et β_2 ?

2. Ecrire le système différentiel pour ce modèle puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et y'=0 et en déduire les coordonnées de l'équilibre.

3. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ tracer les deux isoclines, et dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé.

4. Peut-on en déduire le comportement des deux populations lorsque t tend vers $+\infty$?

5. On observe que les deux populations tendent vers l'équilibre[1] lorsque t tend vers $+\infty$. Sur la figure précédente, tracer une trajectoire ayant ce comportement puis tracer ci dessous les graphes de $x(t)$ et $y(t)$ correspondant à cette trajectoire.

Exercice 2. : On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourissent de la même ressource et que l'on modélise par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 0,1x(3 - 0,06x - 0,02y) \\ y' & = & 0,1y(1 - 0,01x - 0,02y) \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente.

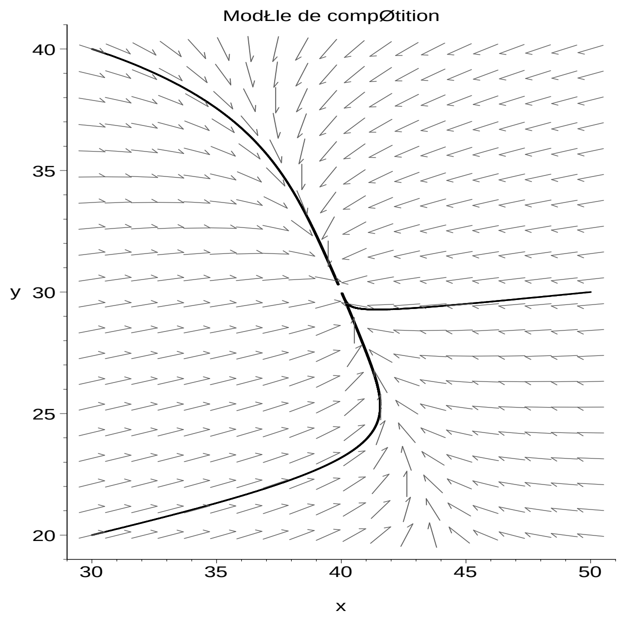
2. Préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges (en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$) lorsque l'on a $y(0) = 30$.

3. Calculer les isoclines puis les coordonnées des quatres points d'équilibre du système.

4. Lequel parmi ces équilibre correspond à la coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

[1] Un équilibre vers lequel les trajectoires voisines tendent en spiralant est appelé un *foyer stable*.

5. Voici le dessin du champs de vecteurs associé à (2). Ajouter les isoclines et vérifier que les flèches y sont bien horizontales et verticales respectivement.



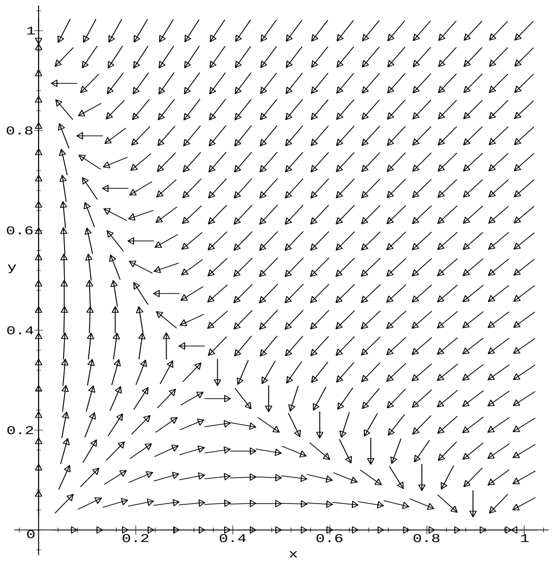
6. Le point d'équilibre correspondant à la coexistence des deux populations est un *noeud stable.* Pourquoi, à votre avis, n'est-ce pas un foyer stable ?

7. Si la population initiale des scorpions rouges est 20 et celle de scorpions noirs de 30, décrire l'évolution $x(t)$ et $y(t)$ de chacune des deux populations selon ce modèle. Même question si les tailles initiales sont de 50 et 40 respectivement.

Exercice 3. :

1. Le tracé suivant repésente le champs de vecteurs associé à un autre système de deux espèces en compétition
$$\begin{cases} x' &= (1-x-2y)x \\ y' &= (1-2x-y)y \end{cases} \tag{3}$$
où $x(t)$ et $y(t)$ s'expriment en milliers d'individus. Ajouter sur ce dessin les isoclines et les points d'équilibre.

```
coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes
```



2. Parmi ces équilibres, lesquels sont attractifs, répulsifs, ni l'un ni l'autre ? Celui dont les deux composantes sont non nulles s'appelle un *col*.

3. Tracer la trajectoire issue de $(1, 1)$. Peut-on parler dans ce cas de coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

4. Même question pour la trajectoire issue du point $(1, 1-\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ petit.

5. Même question pour la trajectoire issue du point $(1-\varepsilon, 1)$.

6. Expliquer pourquoi la dynamique de ce modèle conduit en général à l'extinction de l'une des deux populations.