NOM :
PRENOM : Corrigé

Date : Fév 2010
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 3
Modèles dynamiques : autres exemples

Exercice 1. : On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassins ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\begin{cases} x' &= \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' &= -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{cases} \qquad (1)$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur*. On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Quel est, selon ce modèle, le taux de mortalité par tête des poissons ? Que représente les coefficients β_1 et β_2 ?

Le taux de mortalité des poissons est α_2 puisque, si $x=0$, $y' = -\alpha_2 y$.
Les coefficients β_1 et β_2 sont des coefficients d'interaction des deux populations de larves et de poissons.

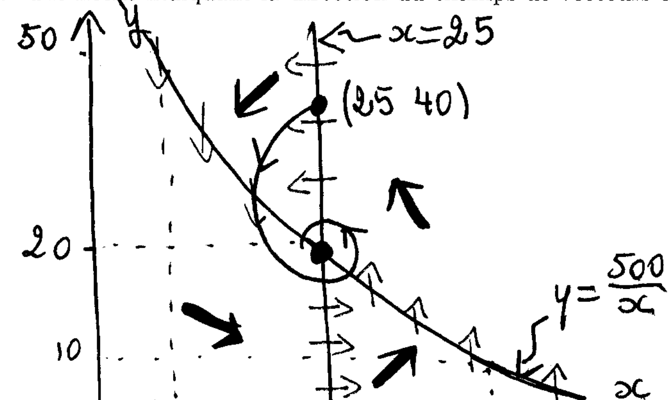
2. Ecrire le système différentiel pour ce modèle puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et $y'=0$ et en déduire les coordonnées de l'équilibre.

$$\begin{cases} x' = 20 - 0{,}04\,xy \\ y' = -0{,}75\,y + 0{,}03\,xy \end{cases}$$

$x' = 0 \iff 20 - 0{,}04\,xy = 0 \iff xy = 500$
L'isocline $x' = 0$ est donc la courbe d'équation $y = \frac{500}{x}$.

$y' = 0 \iff -0{,}75\,y + 0{,}03\,xy = 0 \iff y = 0$ ou $x = \frac{0{,}75}{0{,}03} = 25$.
L'isocline $y' = 0$ est donc formée de 2 droites $y = 0$ et $x = 25$
L'équilibre est à l'intersection de $y = \frac{500}{x}$ et $x = 25$: c'est le point $(25, 20)$.

3. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ tracer les deux isoclines, et dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé.

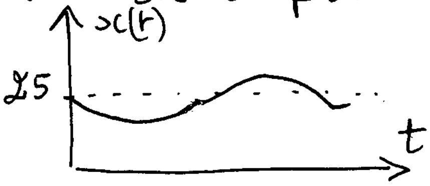


4. Peut-on en déduire le comportement des deux populations lorsque t tend vers $+\infty$?

On observe que les trajectoires tournent autour de l'équilibre (25, 20) donc les 2 populations vont osciller. Mais on ne sait pas si elles vont spiraler vers l'intérieur ou vers l'extérieur et donc on ne sait pas si elle tendent vers l'équilibre ou vers l'infini.

5. On observe que les deux populations tendent vers l'équilibre[1] lorsque t tend vers $+\infty$. Sur la figure précédente, tracer une trajectoire ayant ce comportement puis tracer ci dessous les graphes de $x(t)$ et $y(t)$ correspondant à cette trajectoire.

Je choisis le point initial $(25\ 40)$.



Exercice 2. : On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourissent de la même ressource et que l'on modélise par le système suivant :

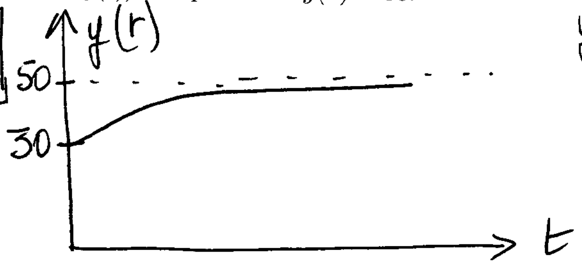
$$\begin{cases} x' = 0,1x(3 - 0,06x - 0,02y) \\ y' = 0,1y(1 - 0,01x - 0,02y) \end{cases} \tag{2}$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente.

Lorsque $x(t) = 0$, $y' = 0,1\, y(1 - 0.02\, y)$
Ceci s'écrit encore $y' = r\, y(1 - \frac{y}{K})$ avec $r = 0,1$ et $K = 50$ (car $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$). Donc le taux de croissance intrinsèque est $r = 0,1$ et la capacité biotique $K = 50$. C'est une dynamique logistique.

2. Préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges (en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$) lorsque l'on a $y(0) = 30$.

$\boxed{\text{Pour } x(t) = 0}$



$y(t)$ est croissante et tend vers $K = 50$, lorsque t tend vers l'infini.

3. Calculer les isoclines puis les coordonnées des quatres points d'équilibre du système.

$x' = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = -3x + 150 \end{cases}$ et $y' = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = -0.5x + 50 \end{cases}$

Les équilibres sont donc solution de $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 0 \\ y = -0.5x + 50 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -3x + 150 \\ y = 0 \end{cases}$ ou enfin $\begin{cases} y = -3x + 150 \\ y = -0.5x + 50 \end{cases}$. On obtient 4 points $(0,0)$, $(0,50)$, $(50,0)$ et $(40\ 30)$.

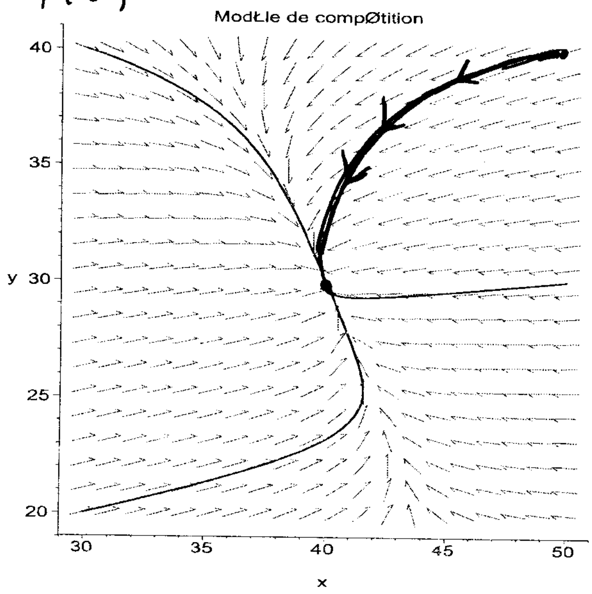
4. Lequel parmi ces équilibres correspond à la coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

Seul le point $(40, 30)$ correspond à la coexistence des 2 populations car, pour les 3 autres, l'une au moins des deux populations est nulle (extinction).

[1] Un équilibre vers lequel les trajectoires voisines tendent en spiralant est appelé un *foyer stable*.

Tracer la trajectoire issue

5. Voici le dessin du champs de vecteurs associé à (2). A~~jouter les isoclines et vérifier que les flèches y sont bien horizontales et verticales respectivemen~~t.
du point (50, 40).

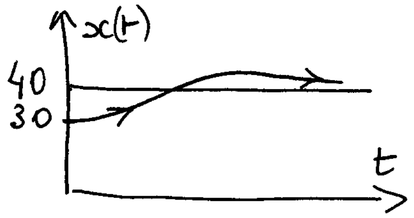


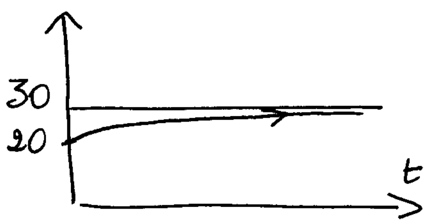
6. Le point d'équilibre correspondant à la coexistence des deux populations est un *noeud stable.* Pourquoi, à votre avis, n'est-ce pas un foyer stable ?

Ce n'est pas un foyer stable car les trajectoires tendent vers l'équi-libre sans osciller.

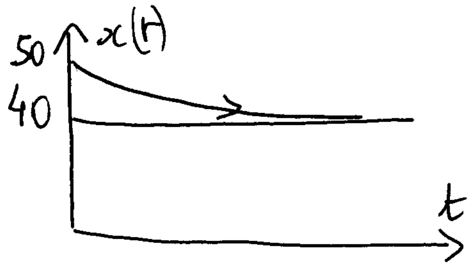
7. Si la population initiale des scorpions rouges est 20 et celle de scorpions noirs de 30, décrire l'évolution $x(t)$ et $y(t)$ de chacune des deux populations selon ce modèle. Même question si les tailles initiales sont de 50 et 40 respectivement.

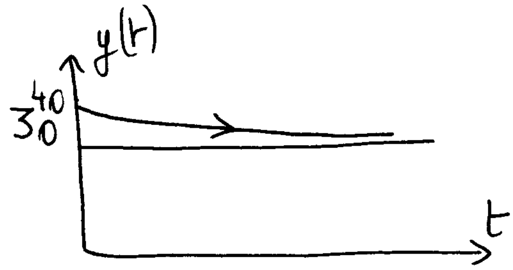
- Pour $x(0) = 30$ et $y(0) = 20$:





- Pour $x(0) = 50$ et $y(0) = 40$:





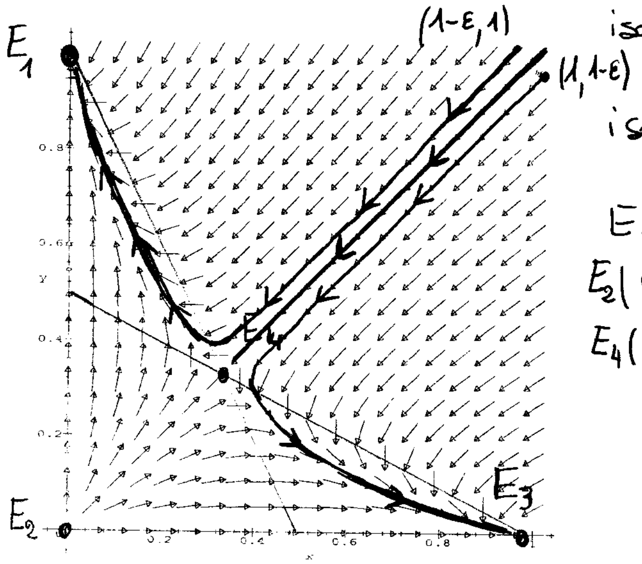
Exercice 3. :

1. Le tracé suivant repésente le champs de vecteurs associé à un autre système de deux espèces en compétition

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & (1-x-2y)x \\ y' & = & (1-2x-y)y \end{array}\right. \qquad (3)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ s'expriment en milliers d'individus. Ajouter sur ce dessin les isoclines et les points d'équilibre.

coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes



isocline $x' = 0$: $\left\{ x = 0 \text{ ou } y = \frac{1-x}{2} \right.$

isocline $y' = 0$: $\left\{ y = 0 \text{ ou } y = 1 - 2x \right.$

Équilibres :

$E_2(0,0)$ $E_1(0,1)$ $E_3(1,0)$ et

$E_4(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1-x}{2} \\ y = 1-2x \end{array}\right.$

$1 - x = 2(-2x+1)$

$\Leftrightarrow$

$3x = 1$

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow y = 1 - 2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

2. Parmi ces équilibres, lesquels sont attractifs, répulsifs, ni l'un ni l'autre ? Celui dont les deux composantes sont non nulles s'appelle un *col*.

Sur la figure, on voit que E_1 et E_3 sont attractifs, E_2 est répulsif et E_4 n'est ni l'un, ni l'autre. Certaines traj. tendent vers E_4 et d'autres s'en éloignent.

3. Tracer la trajectoire issue de $(1, 1)$. Peut-on parler dans ce cas de coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

La trajectoire issue de $(1,1)$ tend (le long de la droite $y = x$) vers l'équilibre E_4. En ce point il y a coexistence des 2 populations.

4. Même question pour la trajectoire issue du point $(1, 1-\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ petit.

La trajectoire issue de $(1, 1-\varepsilon)$ longe la précédente mais ne tend pas vers E_4, mais s'en écarte et tend vers E_3. Il y a donc, dans ce cas, extinction de la population $y(t)$.

5. Même question pour la trajectoire issue du point $(1-\varepsilon, 1)$.

La trajectoire issue de $(1-\varepsilon, 1)$ de même s'approche de E_4 mais s'en écarte ensuite pour tendre vers E_1 (et donc vers un équilibre pour lequel seule la population y survie.

6. Expliquer pourquoi la dynamique de ce modèle conduit en général à l'extinction de l'une des deux populations.

Toutes les solutions de ce modèle conduisent soit vers E_1, soit vers E_3 sauf si $x(0) = y(0)$ exactement. L'égalité (exacte !) des 2 populations initiale étant improbable, ce modèle conduit donc effectivement à l'extinction de $x(t)$ (E_1) ou de $y(t)$ (E_2).