

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 4
Modèle de Leslie

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On considère une population d'oiseaux dont le cycle de reproduction comporte 3 étapes, *oeufs*, *oisillons* (juvéniles) et *oiseaux* (adultes). Si l'on désigne respectivement par o_t , j_t et a_t les effectifs à l'instant t de ces trois classes, on suppose que l'on a :

$$\begin{cases} o_{t+1} = 6j_t + 10a_t \\ j_{t+1} = 0,5o_t \\ a_{t+1} = 0,4j_t \end{cases} \quad (1)$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle et indiquer le sens des 4 coefficients 6, 10, 0,5 et 0,4.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (o_0, j_0, a_0) , de calculer les effectifs (o_1, j_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (o_2, j_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Si $(o_0, j_0, a_0) = (30, 50, 50)$, on obtient :

t	0	1	2	3	4	5	6
o_t	30	...	290	2460	2470	7960	12330
j_t	50	15	400	...	1230	1235	3980
a_t	50	20	...	160	58	492	494

Compléter les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

3. Si l'on désigne par $N_t = o_t + j_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (??) les termes successifs de la suite (N_t) , ce qui permet d'appréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	...	696	2765	3758	...	16804

Calculer les coefficients manquant de ce tableau en expliquant vos calculs. Que constatez-vous concernant l'évolution de cette population ?

Exercice 2. : Considérons une population de saumons, en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde. Enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 femelles au cours de sa deuxième année et à 5 femelles au cours de sa troisième année. Ecrire le système dynamique modélisant l'évolution de cette population de saumons.

Si l'on suppose que la population initiale comporte 12 femelles dans chaque classe d'âge, combien y en aura-t-il de chaque classe l'année suivante ? Combien l'année d'après ?

Indiquer quelle est la matrice de Leslie L de ce système. Est-ce une matrice positive ? Une matrice stochastique ? Une matrice primitive ?

Ayant vérifié que cette matrice est primitive, on a calculé sa valeur propre dominante et un vecteur propre associé : on a trouvé $\lambda = 1,5778$ et $V = (0,947 \quad 0,318 \quad 0,044)$. Que peut-on en déduire sur la dynamique de ce modèle de Leslie ? En particulier, quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différentes classes d'âges après un temps long ?