NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

**Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 4**
**Modèle de Leslie**

**On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.**

**Exercice 1. :** On considère une population d'oiseaux dont le cycle de reproduction comporte 3 étapes, *oeufs*, *oisillons* (juveniles) et *oiseaux* (adultes). Si l'on désigne respectivement par $o_t$, $j_t$ et $a_t$ les effectifs à l'instant $t$ de ces trois classes, on suppose que l'on a :

$$\begin{cases} o_{t+1} = 6j_t + 10a_t \\ j_{t+1} = 0,5o_t \\ a_{t+1} = 0,4j_t \end{cases} \quad (1)$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle et indiquer le sens des 4 coefficients 6, 10, 0,5 et 0,4.

- Sous forme matricielle, le système (1) s'écrit : $\begin{pmatrix} o_{t+1} \\ j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_t \\ j_t \\ a_t \end{pmatrix}$
- 6 et 10 sont les coef. de fertilité de la pop. des juveniles et de celle des adultes respectivement.
- 0,5 et 0,4 sont les coef. de survie entre oeufs et oisillons d'une part et entre oisillons et oiseaux d'autre part.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, $(o_0, j_0, a_0)$, de calculer les effectifs $(o_1, j_1, a_1)$ à l'instant suivant $t = 1$, puis, $(o_2, j_2, a_2)$ à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Si $(o_0, j_0, a_0) = (30, 50, 50)$, on obtient :

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $o_t$ | 30 | 800 | 290 | 2460 | 2470 | 7960 | 12330 |
| $j_t$ | 50 | 15 | 400 | 145 | 1230 | 1235 | 3980 |
| $a_t$ | 50 | 20 | 6 | 160 | 58 | 492 | 494 |

Compléter les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

- Calcul de $o_1$ : $o_1 = 6j_0 + 10a_0 = 6(50) + 10(50) = 800$
- Calcul de $a_2$ : $a_2 = 0,4 j_1 = (0,4)(15) = 6$.
- Calcul de $j_3$ : $j_3 = 0,5\, o_2 = (0,5)(290) = 145$

3. Si l'on désigne par $N_t = o_t + j_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant $t$ (et donc $N_0$ l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (??) les termes successifs de la suite $(N_t)$, ce qui permet d'apréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_t$ | 130 | 635 | 696 | 2765 | 3758 | 9687 | 16804 |

Calculer les coefficients manquant de ce tableau en expliquant vos calculs. Que constatez-vous concernant l'évolution de cette population ?

Calcul de $N_1$ : $N_1 = o_1 + j_1 + a_1 = 600 + 15 + 20 = 635$
Calcul de $N_5$ : $N_5 = o_5 + j_5 + a_5 = 7960 + 1235 + 492 = 9687$
On constate que la population augmente fortement avec le temps : on observe qu'elle double presque entre $t=5$ et $t=6$ ce qui fait penser à une croissance exponentielle.

**Exercice 2.** **:** Considérons une population de saumons, en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde. Enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 femelles au cours de sa deuxième année et à 5 femelles au cours de sa deuxième année. Ecrire le système dynamique modélisant l'évolution de cette population de saumons.

Si l'on désigne par $x_t^1$, $x_t^2$ et $x_t^3$ les effectifs des 3 classes d'age à l'instant $t$, la dynamique de cette population est :

$$\begin{cases} x_{t+1}^1 = 4x_t^2 + 5x_t^3 \\ x_{t+1}^2 = 0,53\, x_t^1 \\ x_{t+1}^3 = 0,22\, x_t^2 \end{cases}$$

Si l'on suppose que la population initiale comporte 12 femelles dans chaque classe d'age, combien y en aura-t-il de chaque classe l'année suivante ? Combien l'année d'après ?

Si $\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, on aura en $t=1$ $\begin{cases} x_1^1 = 4(12)+5(12) = 108 \\ x_1^2 = (0,53)(12) = 6,36 \\ x_1^3 = (0,22)(12) = 2,64 \end{cases}$

et en $t=2$ $\begin{cases} x_2^1 = 4(6,36)+5(2,64) = 38,64 \\ x_2^2 = (0,53)(108) = 57,24 \\ x_2^3 = (0,22)(6,36) = 1,3992 \end{cases}$

Indiquer quelle est la matrice de Leslie $L$ de ce système. Est-ce une matrice positive ? Une matrice stochastique ? Une matrice primitive ?

La matrice de Leslie du système est $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,53 & 0 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0 \end{pmatrix}$

- C'est une matrice positive (tous ses coef. sont positifs ou nuls)
- Elle n'est pas stochastique (certains coef. sont supérieurs à 1 et la somme des lignes n'est pas égale à 1)
- On ne sait pas si elle est primitive (il faudrait calculer ses puissances et voir si l'une d'elles est sans zero)

Ayant vérifié que cette matrice est primitive, on a calculé sa valeur propre dominante et un vecteur propre associé : on a trouvé $\lambda = 1,5778$ et $V = (\ 0,947 \quad 0,318 \quad 0,044\ )$. Que peut-on en déduire sur la dynamique de ce modèle de Leslie ? En particulier, quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différente classes d'ages après un temps long ?

On peut déduire qu'à long terme, la croissance de la population de saumons sera exponentielle (ou Malthusienne) de la forme $N_{t+1} = (1,5778)N_t$.

La répartition asymptotique des differentes classes d'age sera égale à $\left(\frac{0,947}{1,309} ; \frac{0,318}{1,309}\ \frac{0,044}{1,309}\right)$ où $1,309 = 0,947+0,318+0,044$.

$= (0,7234 \quad 0,2429 \quad 0,0336)$ donc 72,3%, 24,3% et 3,4% environs.