NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. :

1. Soit $H(x, y) = 3 \ln y - 0.2y + 4 \ln x - 0.1x$. Calculer les deux dérivées partielles de H.

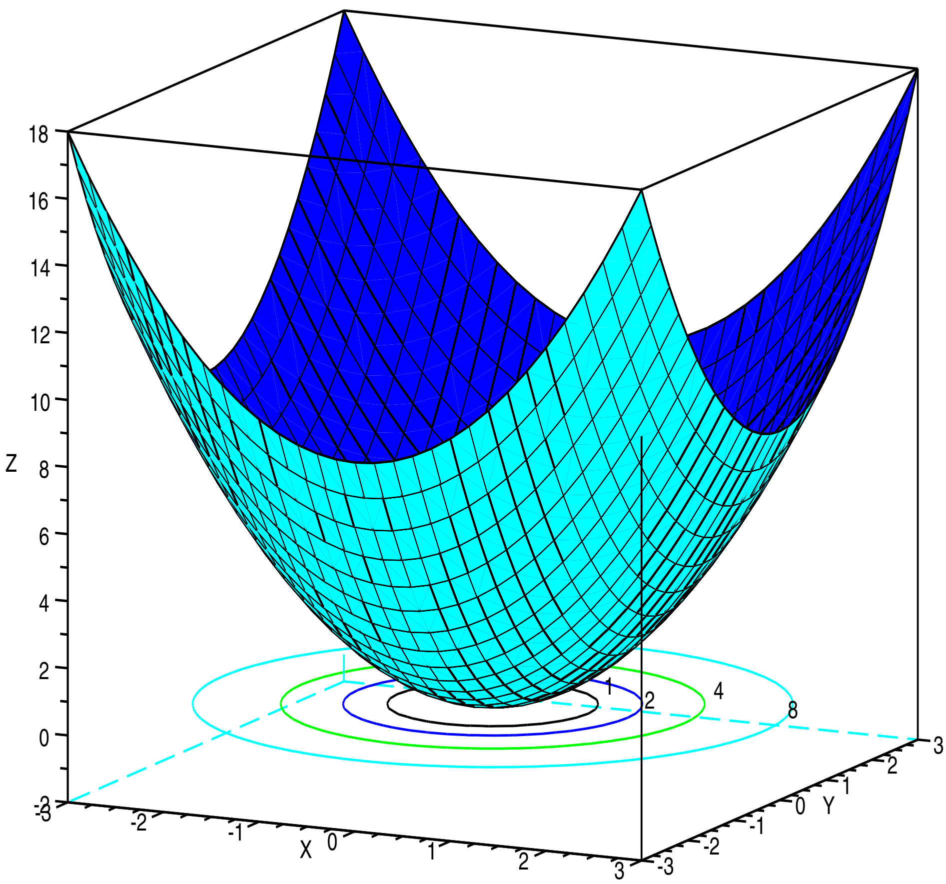
2. Calculer la valeur de la fonction H puis la valeur de son vecteur gradient au point $(x = 50, y = 30)$.

3. Trouver le gradient de la fonction $g(x, y) = 1 + ye^{2x}$ puis le calculer au point $(0, 0)$.

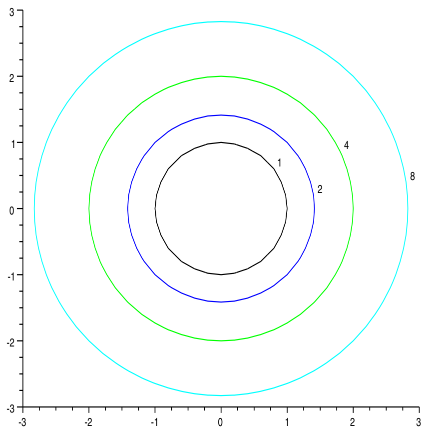
4. Calculer l'équation de la courbe de niveau k=2 de la fonction g puis tracer cette courbe.

Exercice 2. : Le dessin suivant représente le graphe de la fonction f de deux variables, $(x, y) \to x^2 + y^2$ puis quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. Calculer la hauteur (on dit la cote) du point M de la surface d'abscisse et d'ordonnée $M' = (2, -2)$. Marquer sur la première figure le point M et sa projection M' dans le plan $z = 0$. Tracer approximativement l'ensemble des points de la surface de même niveau que M et la projection de cette courbe. Quelle est l'équation de cette projection ?



2. Dans le dessin suivant (qui représente les courbes de niveau de f), marquer le point M' et la courbe de niveau de f passant par M'. Quelle forme a cette courbe ? Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?



Exercice 3. **:** On reprend à présent un exemple du système de Lotka Volterra semblable à celui étudié lors de la première séance où les proies sont des babouins et les prédateurs des guépards :

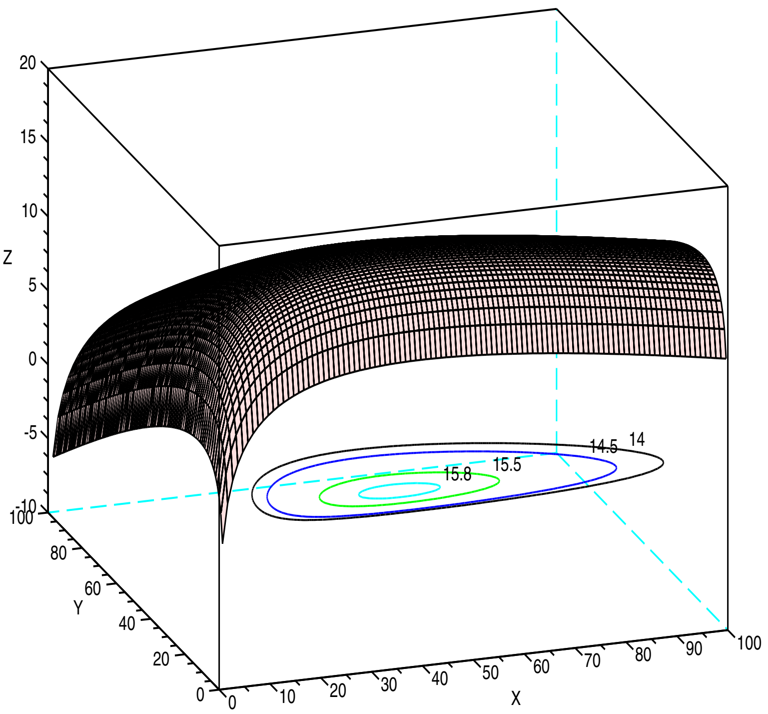
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x - 0.2xy \\ y' & = & -4y + 0.1xy \end{array} \right. \tag{1}$$

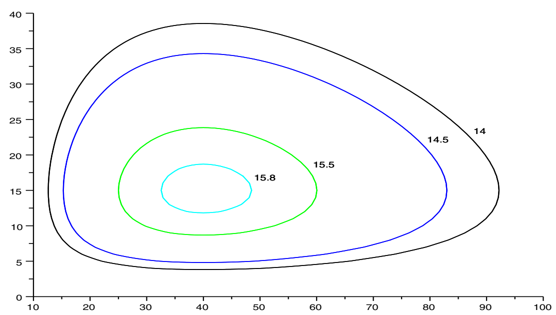
On va étudier la loi de conservation associée à ce système donnée par $H(x, y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$.

Sur le dessin suivant sont représentés le graphe de la fonction H et quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. On considère le point M' du plan $z = 0$ de coordonnées $M' = (50, 30)$. Calculer son image M par H, placer M sur la surface et sa projection M'. Représenter approximativement la courbe de niveau de M sur la figure du bas.

2. Calculer le vecteur gradient de H au point M' et tracer ce vecteur sur la figure du bas.





3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées (x', y') d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur la figure du bas.

4. Montrer qu'en tout point (x, y) le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra en calculant le produit scalaire de ces deux vecteurs.