NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : .
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Le modèle de croissance logistique

Exercice 1. : Une population de bactéries $P(t)$ croît de manière logistique. On suppose que sa taille initiale est de 5mg, que sa capacité biotique est de 100mg et que son taux de croissance intrinsèque est de 0,3mg par heure.

1. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $P(t)$.

$$P'(t) = 0{,}3\,P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{100}\right)$$

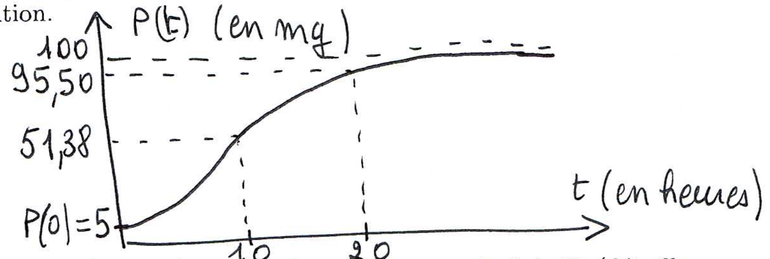
2. La solution de cette équation différentielle correspondant à cette condition initiale est, d'après le cours, de la forme $P(t) = \frac{P(0)K}{P(0)+e^{-rt}(K-P(0))}$. En remplaçant les différentes constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit ici, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 50$.

$$P(t) = \frac{500}{5+95\,e^{-0{,}3t}}$$

$P(10) = \frac{500}{5+95\,e^{-3}} \simeq 51{,}39$ $\quad$ $P(20) = \frac{500}{5+95\,e^{-6}} \simeq 95{,}50$

Comme $P(t) \to 100$ quand $t \to \infty$, $P(50) \approx 100$

3. Esquisser le graphe de cette solution.



4. Calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries passe de 5 à 50 (détailler vos calculs).

On recherche t tel que $P(t) = 50$. On résoud donc l'équation $\frac{500}{5+95e^{-0{,}3t}} = 50$. L'équation s'écrit $10 = 5+95e^{-0{,}3t}$, soit $\frac{1}{19} = e^{-0{,}3t}$. En prenant le log : $\ln 19 = 0{,}3t$, soit $t \simeq 9{,}815$.
Pour passer de 5 à 50, il faudra donc 9 heures et 49 mn environs.

5. Si, au lieu de choisir un modèle logistique pour cette population de bactéries on avait préféré un modèle exponentiel (ou malthusien) au taux de croissance $\frac{P'(t)}{P(t)}$ constant,

$$P'(t) = 0,3P(t)$$

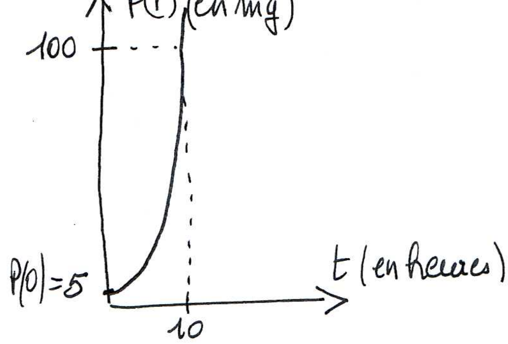
quelle serait, dans ce cas, la fonction $P(t)$[1] ? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$.

C'est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont on connait la solution : $P(t) = P(0)\,e^{0{,}3t} = 5\,e^{0{,}3t}$.

$P(10) = 5e^{3} \approx 100{,}43$ $\quad$ $P(20) = 5e^{6} \approx 2017{,}14$.

[1]Ind : on rappelle que la solution d'une équation différentielle linéaire $y' = ay$ de condition initiale y_0 est $y(t) = y_0 e^{at}$.

6. Esquisser le graphe de cette solution.



7. Calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries passe de 5 à 50 dans ce modèle (détailler vos calculs).

Il faut trouver t tel que $P(t)=50$, soit $5e^{0,3t}=50$ ou encore $e^{0,3t}=10$, $t=\ln(10)/0,3 \approx 7,67$.

Pour passer de 5 à 50, dans ce modèle, il faudrait donc 7 heures et 40 mn environs.

8. Comparez la valeur atteinte par la population de bactéries pour des temps grands dans le modèle logistique et dans le modèle exponentiel. Qu'en pensez-vous ?

Dans le modèle logistique, la population plafonne à 100 alors que dans le modèle exponentiel il atteint des valeurs arbitrairement grandes (2000 et plus) en tendant vers l'infini. On peut penser que le modèle exponentiel n'est pas très réaliste car ~~car~~ comme s'il n'y avait aucune limitation à la croissance.

9. Déduire de l'équation différentielle logistique la valeur du taux de croissance $\frac{P'(t)}{P(t)}$ et indiquer sa limite quand t tend vers l'infini. Pourquoi ce comportement du taux de croissance est-il plus réaliste que celui du modèle exponentiel ?

$\frac{P'(t)}{P(t)} = 0,3\left(1-\frac{P(t)}{100}\right)$. Donc $\lim_{t\to\infty}\frac{P'(t)}{P(t)} = 0,3\left(1-\frac{\lim_{t\to\infty} P(t)}{100}\right) = 0,3(1-1) = 0$.

Le taux de croissance diminue à mesure que la taille de la population augmente. La croissance de la population est donc ralentie. C'est plus réaliste qu'un taux constant qui reste inchangé même quand on s'approche de la capacité biotique.

10. Qu'advient-il à cette population si sa taille initiale est $105mg$ dans le modèle logistique ? dans le modèle exponentiel ? Même question si sa taille initiale est $100mg$.

- Si $P(0)=105$, $P'(0)=0,3P(0)\left(1-\frac{P(0)}{100}\right) \approx -1,575$ donc P commence par décroître et, en fait, reste décroissante puisque $P(t)=\frac{(105)100}{105-5e^{-0,3t}}$. Au contraire pour le modèle exponentiel $P(t)=105e^{0,3t}$ tend vers $+\infty$.
- Si $P(0)=100$, $P(t)$ reste égal à 100 alors que, dans le modèle exponentiel elle tend vers $+\infty$.

11. Faire un dessin comportant l'ensemble des évolutions selon la taille initiale de la population, pour diverses valeurs de celle-ci.