

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Initiation aux équations différentielles

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,05y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation (on pourrait la résoudre en la réécrivant $\frac{dy}{y^2} = 0,1dt$ puis en intégrant les deux termes, mais ce n'est pas demandé ici), que pouvez-vous dire du comportement de cette population à l'avenir si $y(0) = 10$: sera-t-elle croissante, décroissance ?
2. Vérifier que $y(t) = \frac{20}{1-t}$ est une solution de cette équation. Que vaut cette solution à l'instant initial ?

3. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définit cette équation et indiquer quels sont les équilibres de cette dynamique.

Déterminer par un calcul la stabilité de ces équilibres puis esquisser l'allure des solutions $y(t)$.

Exercice 2. : On considère une population de prédateurs $y(t)$ qui se nourrissent exclusivement de proies celle-ci formant une population notée $x(t)$. On propose le modèle suivant pour la dynamique de la population de prédateurs :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)y(t) - 0.1y(t)$$

1. Décrire la dynamique de la population de prédateurs en l'absence de proies.
2. Expliquer ce que représente le terme $2x(t)y(t)$.
3. Décrire la dynamique de la population de prédateurs lorsque la populations des proies est supposée constante ($x(t) = C$).
4. Quelle équation pourriez-vous proposer pour modéliser la dynamique de la population de proies ?