NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Méthode d'Euler

On a vu déjà comment calculer à l'aide de la méthode d'Euler une approximation de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(y)$ de condition initiale $y(0) = y_0$ pour une suite d'instants $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$. Pour cela on calcule la valeur approchée de $y(t_{n+1})$, notée y_{n+1}, par récurrence à partir de celle de $y(t_n)$, notée y_n par

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

où $h = t_{n+1} - t_n$. L'idée de cette méthode est d'approcher la solution $y(t)$ par sa tangente (car on connait y' qui vaut $f(y)$) sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$.

En utilisant la même idée, on peut également calculer une approximation de la solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y) \end{array} \right. \tag{1}$$

issue du point $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$ par la récurrence suivante appelée schéma d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} & = & y_n + hg(x_n, y_n) \end{array} \right. \tag{2}$$

où h est un pas de temps, supposé petit.

Exercice 1. : On considère le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x(1 - 0.02y) \\ y' & = & 0.1y(x - 50) \end{array} \right. \tag{3}$$

1. On considère la trajectoire $(x(t), y(t))$ de ce système issue du point $M_0 = (x(0), y(0)) = (30, 30)$. Que savez-vous de cette trajectoire ?

2. Calculer la valeur du champ de vecteurs associé à ce système au point M_0, c'est-à-dire les deux composantes du vecteur $V_0 = (f(x(0), y(0)), g(x(0), y(0)))$, puis représenter sur un dessin le point M_0 et le vecteur V_0.

3. Voici la suite des valeurs obtenues par le schéma d'Euler pour cette trajectoire :

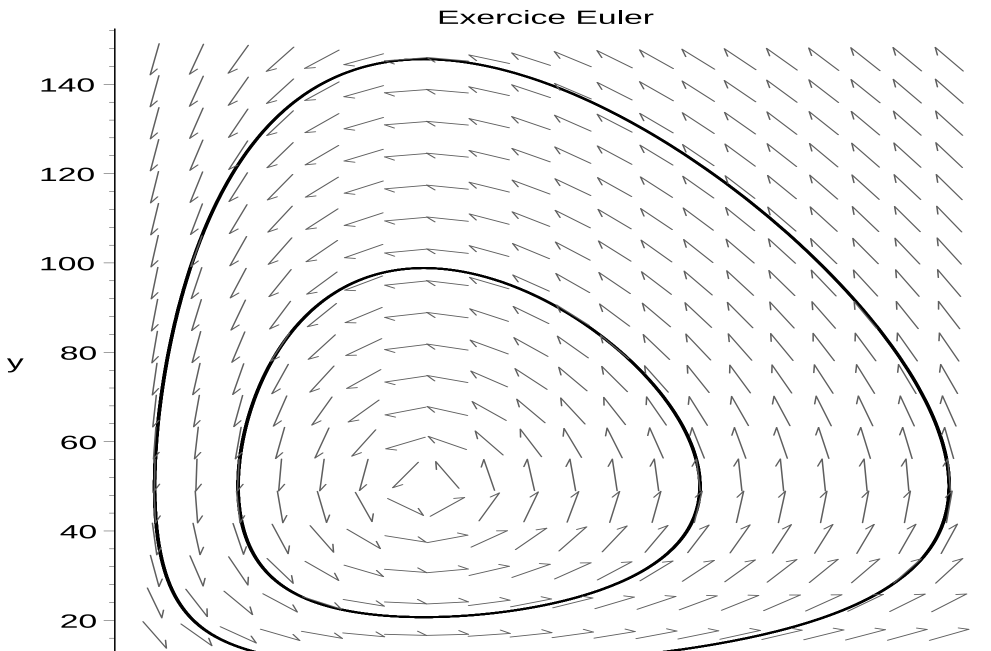
t	0	h	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	$7h$	$8h$	$9h$
x_n	30	33.6	38.84	45.52	53.62	....	72.79	81.85	87.46	85.86
y_n	30	24	21.32	20.37	21.10	......	29.26	38.58	53.04	72.05

   A partir des deux premières valeurs de cette suite, déterminer combien vaut h ici puis tracer sur la figure précédente le vecteur hV_0.

4. Toujours sur la même figure, tracer le point M_1 de coordonnées (x_1, y_1), le vecteur V_1 en ce point et le point M_2.

5. Compéter les deux valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs ci-dessous.

6. Placer les points de la suite (x_n, y_n) sur la figure suivante. Sont-ils situés sur la solution elle-même ? Pourquoi ?



7. Après un tour complet, les points de cette suite formeront-ils un cycle, une spirale entrante, une spirale sortante ? Expliquez.

8. Pouvez-vous donner une valeur indicative de la période de la trajectoire issue du point $(30, 30)$? Expliquer.

Exercice 2. **:** On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & x - y \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Vérifier qu'il n'y a qu'un seul équilibre et qu'il s'agit d'un col.

2. Vérifier que $(e^t, \frac{1}{2}e^t)$ est une solution. Que vaut cette solution en $t = 0$?

3. Représenter les isoclines ainsi que la trajectoire issue du point $M_0 = (1, \frac{1}{2})$ (on notera que si $x(t) = e^t$ et $y(t) = \frac{1}{2}e^t$ alors $y = \frac{1}{2}x$).

4. Calculer quelques points de la suite (x_n, y_n) issue de M_0 et les placer sur la figure. Sont-ils situés sur la solution elle-même ? Pourquoi ?

5. Reprendre la question précédente en remplaçant M_0 par $N_0 = (1, 2)$.