NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles : méthode d'Euler et compléments

Exercice 1. : On modèlise l'évolution de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

$$y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400000}).$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes $0,08$ et 400000 ?

2. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 70000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, ...en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \tag{1}$$

Indiquer votre réponse puis présenter succintement les calculs qui vous y ont conduit :

$$y_0 = 70000 \quad , \quad y_1 = ... \quad , \quad y_2 = ...$$

3. Que pouvez-vous dire de $\lim_{n\to\infty} y_n$?

4. On suppose que l'on autorise un quota de pèche de $h = 3000$, c'est-à-dire que la dynamique est alors
$$y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400000}) - 3000.$$
Indiquer quels sont les équilibres de cette dynamique et préciser leur stabilité.

5. Qu'advient-il à la population de baleines dans ce cas (et selon ce modèle) sachant que $y(0) = 70000$?

6. Reprendre les 3 dernières questions en supposant cette fois qu'au dela du quota légal les activités de pèche illicites portent le prélèvement sur la ressource de 3000 à 5000.

Exercice 2. : On s'intéresse à calculer une approximation de la solution de l'équation différentielle $\frac{dy(t)}{dt} = 18y^2(t)$ de condition initiale y(0)=-0,1.

1. Vérifier par le calcul que $y(t) = y^* = 0$ est une solution (équilibre) puis, en utilisant la figure du champ de vecteur associé, expliquer pourquoi une solution de cette équation de condition initiale positive (resp. négative) reste positive (resp. négative) pour tout $t > 0$. Indiquer sur la figure l'allure que devrait avoir à votre avis la solution considérée.

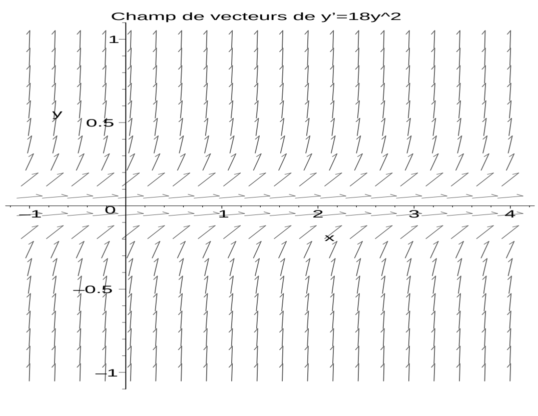


FIG. 1 – Le champs de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = 18y^2$.

2. Calculer les 4 premiers termes de l'approximation d'Euler de la solution de condition initiale $y(0) = -0,1$ en prenant h=1.

3. Comparer les résultats des deux questions précédentes. Qu'en pensez-vous ?

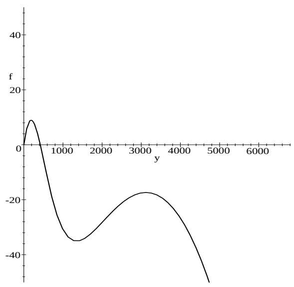
Exercice 3. : La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers de l'Amérique du nord qui est à l'origine de ravages importants par défoliation lors de ses pullulations. La dynamique de la population des chenilles, proposée par Ludwig, Jones et Holling en 1978, est représentée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4a}\right) - \frac{4by(t)^2}{a^2 + 4y(t)^2} \tag{2}$$

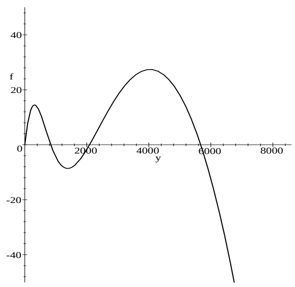
où $y(t)$ désigne la taille de la population de chenilles à l'instant t et où r, a et b sont des paramètres. Le terme $\frac{by^2}{\frac{a^2}{4}+y^2}$ est une terme de prédation qui modélise la pression exercée sur la population de chenilles par un oiseau qui est son principal prédateur (b est proportionnel à la taille cette population d'oiseaux).

1. Supposons que $b = 0$. Comment s'appelle ce type de modèle dans ce cas particulier (absence de prédateurs) ? Indiquer ce que représente les constantes r et a et quel serait, dans ce cas, le comportement de la population de chenilles.

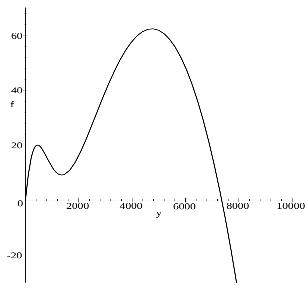
2. Désignons par $f(y)$ la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{4a}) - \frac{4by^2}{a^2+4y^2}$. Les trois figures suivantes représentent les graphes de f lorsque $r = 0,1$ et $b = 200$ pour trois valeurs différentes du paramètre a. Dans chacun des cas, lire sur ces graphes le nombre d'équilibres de la dynamique, en indiquant leur valeurs approximatives, puis, toujours sans calcul, préciser leur stabilité.



$a = 1700$



$a = 2150$



$a = 2500$

3. Supposons que la population initiale de chenilles soit $y(0) = 1000$. Indiquer, dans chacun des trois cas précédents quel comportement le modèle prévoit pour cette population. A votre avis, l'un d'eux mérite-t-il le nom de pullulation ?

4. Dans ce type de modèle, la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?