1

NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles : méthode d'Euler et compléments

Exercice 1. : On modèlise l'évolution de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

$$y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400000}).$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0,08 et 400000 ?

Il s'agit d'un modèle logistique de la forme $y' = ry(1-\frac{y}{K})$
$r = 0,08$ est le taux de croissance intrinsèque
$K = 400000$ est la capacité biotique de la population.

2. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 70000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, ...en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + h \\ y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \quad (1)$$

Indiquer votre réponse puis présenter succintement les calculs qui vous y ont conduit :

$y_0 = 70000$, $y_1 = 74620$, $y_2 \simeq 79476$

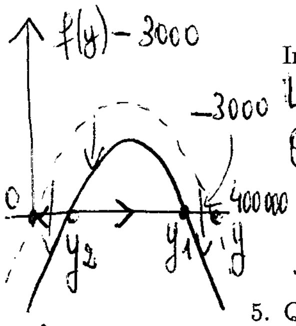
Pour $t_1 = t_0 + 1$, $y_1 = y_0 + 1(0,08\,y_0)(1 - \frac{y_0}{400000})$
$y_1 = 70000 + 5600(1 - \frac{7}{40}) = 74620$

Pour $t_2 = t_1 + 1$, $y_2 = y_1 + 1(0,08\,y_1)(1 - \frac{y_1}{400000})$
$= 74620 + (0,08)(74620)(1 - \frac{7462}{40000})$
$\simeq 79476$ (en arrondissant à l'entier le plus proche)

3. Que pouvez-vous dire de $\lim_{n\to\infty} y_n$?

Les premiers termes indiquent une suite apparemment croissante mais on ne peut jamais rien déduire des premiers termes d'une suite.
Par contre, on sait que, si h est assez petit, la suite (y_n) est proche de la suite $y(t_n)$ obtenue avec la solution exacte. Cette solution exacte tend vers la capacité biotique 400 000 puisque l'équation est logistique. Donc, si l'approximation d'Euler est fiable, $\lim_{n\to\infty} y_n = 400\,000$.

4. On suppose que l'on autorise un quota de pèche de $h = 3000$, c'est-à-dire que la dynamique est alors
$$y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400000}) - 3000.$$
Indiquer quels sont les équilibres de cette dynamique et préciser leur stabilité.



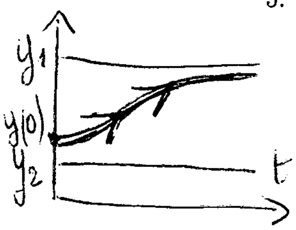
Les équilibres sont solutions de $0{,}08y - \frac{0{,}08}{400\,000}y^2 - 3000 = 0$

On a $\Delta = +0{,}08^2 - 4\left(\frac{0{,}08}{400\,000}\right)(3000) \simeq 0{,}004$

Donc les 2 solutions sont $y_1 = \frac{-0{,}08 - \sqrt{0{,}004}}{2(-0{,}08/400000)} \simeq 358113$ stable

et $y_2 = \frac{-0{,}08 + \sqrt{0{,}004}}{2(-0{,}08/400\,000)} \simeq 41886$ instable

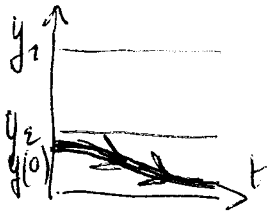
5. Qu'advient-il à la population de baleines dans ce cas (et selon ce modèle) sachant que $y(0) = 70000$?



Sur le graphique, on voit que y_1 est un équilibre stable : c'est la nouvelle capacité biotique vers laquelle tend la population de baleine initialement égale à 70000 car 70000 > 41886.

Si $y(0) = 70000$, $\lim_{t \to \infty} y(t) = y_1 \simeq 358113$.

6. Reprendre les 3 dernières questions en supposant cette fois qu'au dela du quota légal les activités de pèche illicites portent le prélèvement sur la ressource de 3000 à 5000.



Dans ce cas, les deux équilibres sont $y_1 = 322474$ et $y_2 = 77525$. Cette fois $70000 < y_2$ donc la solution va décroître (en s'éloignant de y_2 qui est un équilibre instable) pour tendre vers 0 : c'est l'extinction.

Exercice 2. : On s'intéresse à calculer une approximation de la solution de l'équation différentielle $\frac{dy(t)}{dt} = 18y^2(t)$ de condition initiale y(0)=-0,1.

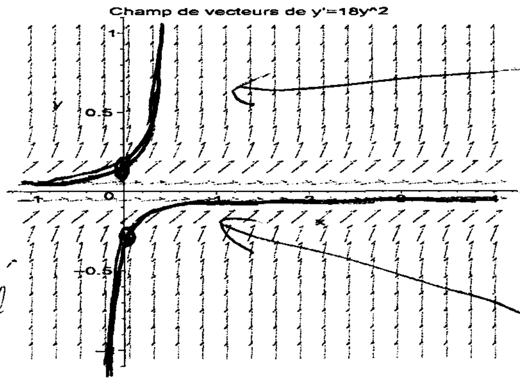
1. Vérifier par le calcul que $y(t) = y^* = 0$ est une solution (équilibre) puis, en utilisant la figure du champ de vecteur associé, expliquer pourquoi une solution de cette équation de condition initiale positive (resp. négative) reste positive (resp. négative) pour tout $t > 0$. Indiquer sur la figure l'allure que devrait avoir à votre avis la solution considérée.

$y = 0$ est une solution de $\frac{dy}{dt} = 18y^2(t)$ car

1) $\frac{d(0)}{dt} = 0$

2) $18(0)^2 = 0$

égalité



solution de cond. initiale $y(0) > 0$

solution $y = 0$ constante

solution de cond. initiale $y(0) < 0$

FIG. 1 – Le champs de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = 18y^2$.

2. Calculer les 4 premiers termes de l'approximation d'Euler de la solution de condition initiale $y(0) = -0,1$ en prenant h=1.

Ici $f(y) = 18y^2$.

Donc $y_0 = -0,1$

$y_1 = y_0 + h\ 18(y_0)^2 = 0,28$

$y_2 = y_1 + h\ 18(y_1)^2 = 1,6918$

$y_3 = y_2 + h\ 18(y_2)^2 \simeq 52,1929$

$y_4 = y_3 + h\ 18(y_3)^2 \simeq 49085,963$

3. Comparer les résultats des deux questions précédentes. Qu'en pensez-vous ?

D'après la figure, la solution issue du point $y(0)=-0,1$ doit croître mais en restant négative (et tendant vers 0).
Les calculs au contraire montre une suite (y_n) qui devient positive et croît énormément.
Cet exemple montre que, dans certains cas, la méthode d'Euler n'est pas fiable.

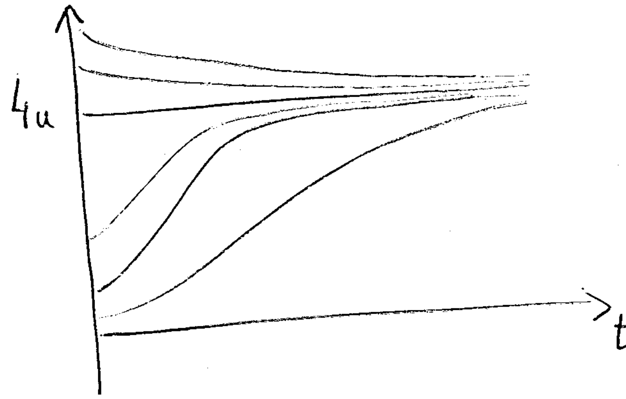
Exercice 3. : La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers de l'Amérique du nord qui est à l'origine de ravages importants par défoliation lors de ses pullulations. La dynamique de la population des chenilles, proposée par Ludwig, Jones et Holling en 1978, est représentée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4a}\right) - \frac{4by(t)^2}{a^2 + 4y(t)^2} \tag{2}$$

où $y(t)$ désigne la taille de la population de chenilles à l'instant t et où r, a et b sont des paramètres. Le terme $\frac{by^2}{\frac{a^2}{4}+y^2}$ est une terme de prédation qui modélise la pression exercée sur la population de chenilles par un oiseau qui est son principal prédateur (b est proportionnel à la taille cette population d'oiseaux).

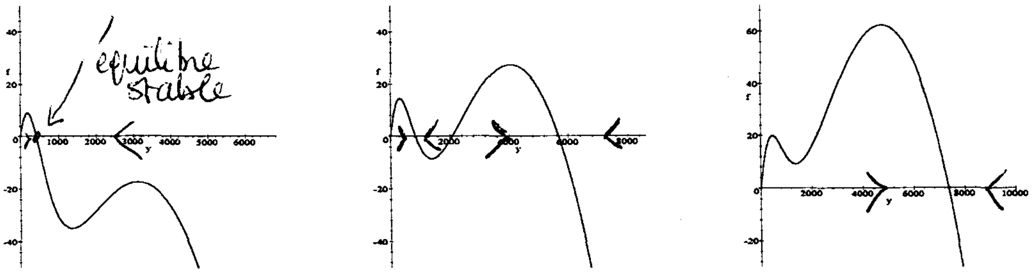
1. Supposons que $b = 0$. Comment s'appelle ce type de modèle dans ce cas particulier (absence de prédateurs) ? Indiquer ce que représente les constantes r et a et quel serait, dans ce cas, le comportement de la population de chenilles.

En l'absence de prédateurs, $b=0$, l'équation $y' = ry\left(1-\frac{y}{4a}\right)$ est un modèle logistique de taux de croissance intrinsèque r et de capacité biotique $4a$.



Le comportement de la population de chenille est décroissant vers $y=4a$ lorsque $y(0)>4a$ et croissant vers $y=4a$ lorsque $y(0)<4a$.
Dans tous les cas la taille de la population tend vers sa capacité biotique.

2. Désignons par $f(y)$ la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{4a}) - \frac{4by^2}{a^2+4y^2}$. Les trois figures suivantes représentent les graphes de f lorsque $r = 0,1$ et $b = 200$ pour trois valeurs différentes du paramètre a. Dans chacun des cas, lire sur ces graphes le nombre d'équilibres de la dynamique, en indiquant leur valeurs approximatives, puis, toujours sans calcul, préciser leur stabilité.



$a = 1700$ $a = 2150$ $a = 2500$

<u>$a = 1700$</u> il y a deux équilibres, $y_0 = 0$ et $y_1 = 500$
le second est un équilibre stable

<u>$a = 2150$</u> il y a quatre équilibres, $y_0 = 0$, $y_1 = 800$, $y_2 = 2000$ et $y_3 = 5700$ environs. Les flèches indiquent que $y_1 = 800$ et $y_3 = 5700$ sont stables, le deux autres étant instables.

<u>$a = 2500$</u> il y a deux équilibres, $y_1 = 7500$ environs et $y_0 = 0$
$y_1 = 7500$ est un équilibre stable qui attire toutes les solutions.

3. Supposons que la population initiale de chenilles soit $y(0) = 1000$. Indiquer, dans chacun des trois cas précédents quel comportement le modèle prévoit pour cette population. A votre avis, l'un d'eux mérite-t-il le nom de pullulation ?

La discussion a lieu en fonction de la position de la C.I, $y(0) = 1000$, par rapport aux points d'équilibre.
Pour $a = 1700$, la population décroît et tend vers $y_1 = 500$
Pour $a = 2150$, la population décroît encore vers $y_1 = 800$.
Pour $a = 2500$ par contre la population croît et tend vers l'équilibre $y_1 = 7500$: on peut parler dans ce cas de pullulation.

4. Dans ce type de modèle, la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?

Non, on voit à la forme de $f(y)$ que quelque soit la valeur du paramètre a, y décroît lorsqu'il a une grande valeur car $f(y) < 0$ pour y grand.