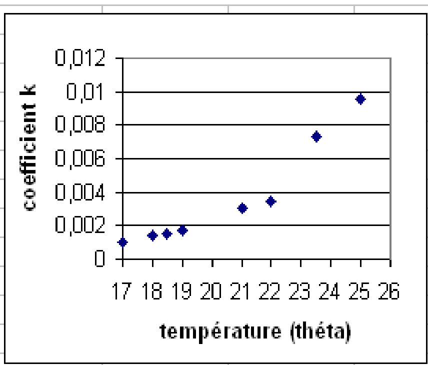
NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

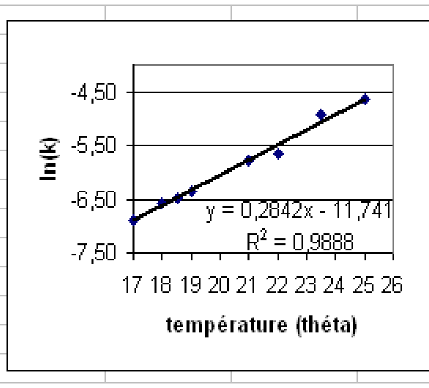
Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 9
Régression linéaire

Exercice 1. : On cherche à modéliser la croissance de la taille d'*Elysia subornata*, petite limace de mer de $2,5cm$ de long - ordre des Ascoglosses opistobranches. On pense que sa taille à l'instant t (comptée en jours) peut s'écrire $y(t) = 55(1 - \exp(-kt))$ où 55 est la longueur maximale théorique de l'animal et k un coefficient de croissance. On observe que ce coefficient de croissance k dépend de la température de l'eau, notée θ pour *théta*. Expérimentalement on a pu obtenir les valeurs de k et θ rapportées dans le tableau de gauche. Sur la première figure on a représenté le nuage de point correspondant et sur la figure de droite le nuage $(\theta, \ln(k))$ pour lequel on a effectué une régression linéaire.

theta	k
17	0,001
18	0,0014
18,5	0,0016
19	0,0017
21	0,0031
22	0,0035
23,5	0,0073
25	0,0096



theta	ln(k)
17	-6,91
18	-6,57
18,5	-6,47
19	-6,37
21	-5,78
22	-5,65
23,5	-4,92
25	-4,64



1. Pourquoi n'a-t-on pas effectué directement une régression linéaire de k sur θ ?

2. Expliquer comment a été calculée la pente 0.2842 de la droite de régression linéaire.

3. Que représente R^2 et que peut-on déduire de sa valeur ?

4. De la relation linéaire obtenue entre $\ln(k)$ et θ, on peut déduire que k est une fonction exponentielle de θ de la forme $k = Ae^{B\theta}$. Calculer les constantes A et B.

5. Calculer la valeur de k prédite par ce modèle pour une température $\theta = 24°C$. En déduire la taille atteinte à cette température par Elysia subornata après 20 jours.

Exercice 2. :

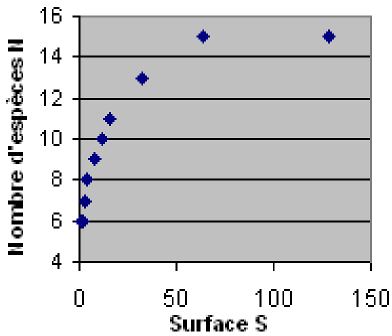
L'une des rares lois que l'on a pu mettre en évidence en Ecologie est la relation existant entre le nombre N d'espèces présentes dans un habitat donné (bien délimité) et la surface S de cet habitat. On considère généralement que cette relation est de la forme

$$N = AS^B \tag{1}$$

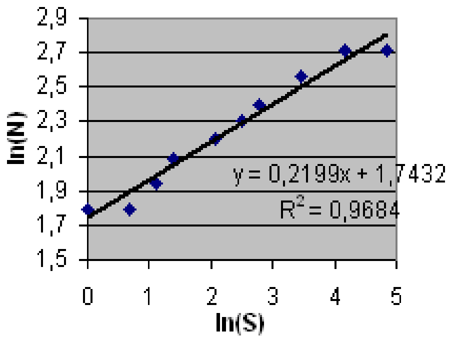
où A et B sont deux constantes. Afin de vérifier cette relation pour les plantes présentes dans une prairie (pissenlit, paquerettes, orties, boutons d'or, ...), on a effectué les mesures indiquées dans le premier tableau ci-dessous. On a représenté sur la première figure ci-dessous les valeurs de N en fonction de celles de S et sur la deuxième les valeurs de $\tilde{N} = \ln(N)$ en fonction de celles de $\tilde{S} = \ln(S)$. On voit que la regression linéaire de $\tilde{N}$ sur $\tilde{S}$ a donné :

$$\tilde{N} = 0,2199\tilde{S} + 1,7432 \text{ avec } R^2 = 0,9684 \tag{2}$$

S	N
1	6
2	6
3	7
4	8
8	9
12	10
16	11
32	13
64	15
128	15



ln(S)	ln(N)
0,00	1,79
0,69	1,79
1,10	1,95
1,39	2,08
2,08	2,20
2,48	2,30
2,77	2,40
3,47	2,56
4,16	2,71
4,85	2,71



1. Si l'on avait effectué directement une régression linéaire de N sur S, la valeur du R^2 aurait-elle été plus petite ? plus grande ? Expliquer.

2. A partir de la relation linéaire (2) obtenue entre $\ln(N)$ et $\ln(S)$, déduire une estimation des constantes A et B de la relation (1).

3. Quelle valeur $\tilde{N}$ ce modèle linéaire prédit-il pour $\tilde{S} = ln(128)$? En comparant avec la valeur de $\tilde{S}$ observée, calculer le résidu ε en ce point.

4. Quelle valeur $\tilde{N}$ ce modèle linéaire prédit-il pour $\tilde{S} = ln(100)$? En déduire le nombre d'espèces pouvant coexister dans un habitat de surface $S = 100$, selon ce modèle.