

Cours 6 et 7 : Initiation aux équations différentielles

Avec le modèle logistique et son petit frère le modèle malthusien, on a rencontré deux exemples d'équations différentielles. Nous allons voir ici plus généralement ce qu'est une équation différentielle et comment on peut les étudier. On indiquera pour cela trois approches, la résolution explicite de l'équation, le calcul approché des solutions et l'étude qualitative (ou géométrique).

1 Définitions et solutions explicites

Considérons une quantité $y(t)$ (taille d'une population, concentration d'une substance, ...) qui évolue au cours du temps et sa dérivée $y'(t)$. Supposons qu'on soit conduit à postuler une relation entre cette quantité et sa dérivée de la forme

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

pour une fonction f particulière. Cette relation est une *équation différentielle du premier ordre*¹ et la résolution d'une telle équation consiste à trouver toutes les fonctions $y(t)$ inconnues qui satisfont cette équation.

Exemple : Ainsi l'équation différentielle de Malthus, $y'(t) = ry(t)$ est définie par la fonction $f(y) = ry$ qui est une fonction linéaire. L'ensemble de ses solutions s'écrit $\{y(t) = y(0)e^{rt}, y(0) \in \mathbb{R}\}$. Notons qu'il y en a une infinité, autant que de valeurs possibles pour la *condition initiale* $y(0)$.

Exemple : De même, l'équation différentielle logistique, $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$ est définie par la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ qui est un polynôme de degré deux. L'ensemble de ses solutions s'écrit $\{y(t) = \frac{y(0)K}{y(0) + (K - y(0))e^{-rt}}, y(0) \in \mathbb{R}\}$. Il y en a aussi une infinité.

Lorsque l'équation différentielle est de la forme $\frac{dy(t)}{dt} = a(t)y(t) + b(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions données, on dit que l'équation différentielle est *linéaire*. C'est le cas du modèle malthusien pour lequel $a(t) = r$ et $b(t) = 0$ (a et b sont des fonctions constantes) mais ce n'est pas le cas du modèle logistique. Les équations linéaires peuvent être *résolues explicitement*, c'est-à-dire qu'on peut écrire de façon explicite l'ensemble de leurs solutions (que l'on appelle encore *la solution générale*). Tout d'abord, si $b(t) = 0$, $y(t) = y(0)e^{\int_0^t a(t)dt}$. Plus généralement, on doit d'abord pour cela trouver une solution particulière de l'équation, que l'on notera $y^*(t)$, la solution générale s'écrivant alors

$$y(t) = y^*(t) + (y(0) - y^*(0)) e^{\int_0^t a(t)dt}.$$

Exemple : On peut vérifier que $y^*(t) = te^{2t}$ est une solution de l'équation $y' = 2y + e^{2t}$ et en déduire que la solution générale de cette équation s'écrit $y(t) = y(0)e^{2t} + te^{2t}$.

Au delà des équations linéaires, il y a un petit nombre d'autres équations différentielles qui peuvent être résolues explicitement. Mais, le plus souvent, les équations différentielles que l'on est amené à utiliser ne peuvent pas être résolues de cette façon. On a alors recours au calcul approché.

2 Calcul approché des solutions

La méthode d'Euler est connue (programmes de 1ère S et de terminale S) comme une méthode permettant de calculer une approximation de la primitive d'une fonction ou d'explorer les liens entre la fonction exponentielle et les séries géométriques. Nous allons voir qu'elle permet avant tout de calculer des solutions approchées d'équations différentielles. L'idée de la méthode d'Euler est la suivante : pour tracer le graphe de la solution de condition initiale $y_0 = y(t_0)$ dans le plan (t, y) , on part du point $M_0 = (t_0, y_0)$ et, on profite du fait que, bien que la fonction $y(t)$ soit inconnue, la pente de son graphe est donnée par l'équation différentielle. En effet, comme $y' = f(y)$, l'équation différentielle donne, en chaque

¹Les équations différentielles du 2e ordre font intervenir non seulement y et y' mais aussi y'' et les équations d'ordre n font intervenir les dérivées jusqu'à l'ordre n .

point du plan (t, y) , un vecteur $(1, f(y))$ tangent au graphe de la solution $y(t)$. On part alors du point $M_0 = (t_0, y_0)$, on choisit un pas $h > 0$, et on trace un premier segment d'origine M_0 , de pente $f(y_0)$ et d'extrémité le point $M_1 = (t_1, y_1)$ d'abscisse $t_1 = t_0 + h$. Puis on recommence de M_1 à $M_2 = (t_2, y_2)$ mais en remplaçant la pente $f(y_0)$ du segment par $f(y_1)$ et ainsi de suite. On obtient les formules suivantes (pour $n \geq 1$) :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}) \end{cases} \quad (1)$$

La solution approchée obtenue est d'autant plus proche de la solution exacte que le pas h est choisi petit. On peut en réalité vérifier que, lorsque ce pas tend vers zéro, la solution approchée tend vers la solution exacte. Mais, pour un pas donné, même petit, on n'est jamais complètement sûr que le comportement de la solution approchée soit le même que celui de la solution exacte. Comme toujours, il est prudent de contrôler le résultat fourni par l'algorithme d'Euler par des considérations de nature différente, comme par exemple une étude qualitative.

3 Etude qualitative

La principale caractéristique du modèle logistique que nous avons étudié précédemment est qu'il présente un *équilibre attractif* vers lequel tendent toutes les solutions du modèle, quelque soit leur condition initiale (sauf si $y(0)=0$!). Or l'existence d'équilibres et leurs propriétés (par exemple le fait que les autres solutions tendent vers lui) sont des éléments que l'on peut souvent déduire directement de l'équation différentielle, même si l'on ne sait pas calculer explicitement ses solutions. C'est l'étude du graphe de la fonction f (la parabole du cas logistique) qui suffit pour cela.

Définition : Pour une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t)), \quad (2)$$

on appelle *équilibre* ou *état stationnaire* une valeur constante y^* de la quantité y telle que si $y(0) = y^*$ alors $y(t) = y^*$ pour tout t (la quantité *reste à l'équilibre*). Un équilibre est donc une solution constante de l'équation différentielle. Une telle solution a nécessairement une dérivée nulle, c'est-à-dire que l'on a $f(y^*) = 0$; en d'autres termes y^* est aussi *un zéro* de la fonction f .

Ainsi dans le modèle malthusien où $f(y) = ry$, il y a un seul équilibre $y^* = 0$ et dans le modèle logistique où $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$, il y en a deux, $y^* = 0$ et $y^* = K$.

Dans un modèle de type (2), il y a autant d'équilibres différents qu'il y a de zéros différents de la fonction f . On peut donc visualiser les différents équilibres de l'équation en traçant le graphe de la fonction f . Les équilibres sont les abscisses des points d'intersection du graphe avec l'axe horizontal (qui est ici l'axe des y). Et ce graphe permet en outre de visualiser, sur son axe horizontal, un schéma de la dynamique : il suffit de mettre une flèche dans le sens des y croissants sur les segments de l'axe où $f > 0$ (c'est-à-dire où le graphe de f est au dessus de l'axe) et une flèche dans le sens des y décroissants sur les segments de l'axe où $f < 0$. Parfois ce schéma de la dynamique est suffisant et peut remplacer à lui seul une résolution de l'équation (qui, de toute façon, est bien souvent impossible).

Définition : On dit qu'un équilibre y^* pour laquelle on a $f'(y^*) < 0$ est un *équilibre stable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en rapprocher. De façon analogue, on dit qu'un équilibre y^* pour laquelle on a $f'(y^*) > 0$ est un *équilibre instable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en éloigner.

On peut vérifier en appliquant ce critère que l'unique équilibre du modèle malthusien est stable lorsque $r < 0$ (extinction) et instable lorsque $r > 0$ (explosion) et de même, si l'on suppose $r > 0$, on peut vérifier que l'équilibre $y^* = K (> 0)$ du modèle logistique est un équilibre stable (capacité biotique) alors que $y^* = 0$ est un équilibre instable.

Lorsque $f'(y^*) = 0$, on ne peut pas savoir à partir de f' si l'équilibre est stable, instable ou ni l'un ni l'autre.

La condition $f'(y^*) < 0$ (resp. $f'(y^*) > 0$) est donc *un critère de stabilité* (resp. *d'instabilité*) qui se révèle très opérationnel puisqu'il se calcule facilement. Pour rendre ce critère intuitif, on se reportera à nouveau au schéma de la dynamique obtenu à partir du graphe de f . On y voit que lorsque $f'(y^*) < 0$ le graphe de f passe au point y^* de valeurs positives à des valeurs négatives et donc que la population croît tant qu'elle est plus petite que y^* (puisque $f'(y) > 0$) et décroît tant qu'elle est plus grande. Elle

tend donc dans tous les cas à se rapprocher de l'équilibre. On fait le même raisonnement, inversé cette fois, dans le cas où $f'(y^*) > 0$.

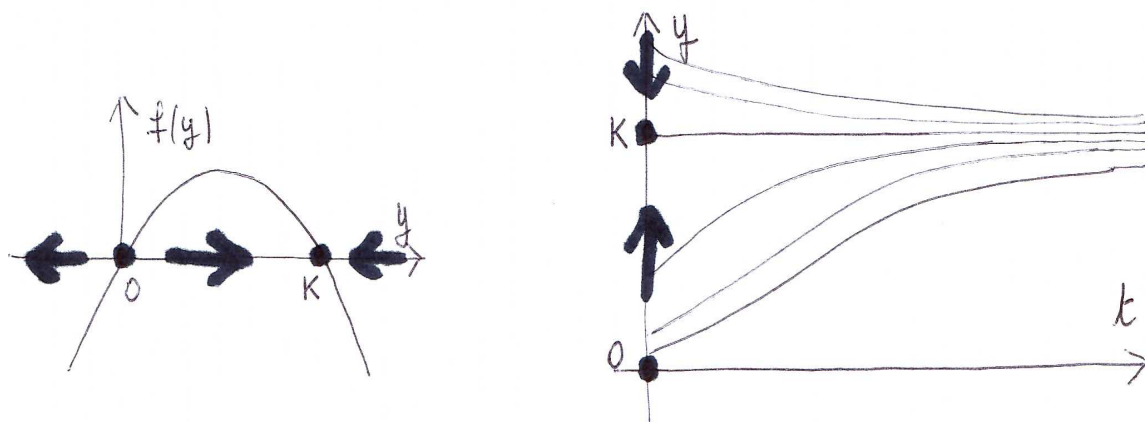


FIG. 1 – Graphe de la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ dans le plan (y, y') et esquisse des solutions de l'équation différentielle $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$ dans le plan (t, y) . Sur l'axe des y , les points représentent les équilibres et les flèches indiquent le sens de variation des solutions (croissantes si $y' > 0$ et décroissantes si $y' < 0$).

La figure ci dessus montre que pour une équation différentielle telle que (2), la détermination des équilibres et du sens de variation des solutions suffit bien souvent pour *tracer l'esquisse des solutions de l'équation*. C'est ce qu'on appelle l'étude qualitative. Notons que cette esquisse en dit souvent plus sur le comportement des solutions que l'expression explicite de la solution générale (lorsqu'elle peut être calculée) car son l'expression, éventuellement compliquée, se révèle souvent bien peu parlante.