

NOM :
PRENOM :

Groupe :

Date : 13-17 septembre 2010 .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaînes de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.
2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l'état *forêt* à l'état *lande* ?
3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = m, X_1 = f, X_2 = f, X_3 = l$ en fonction de $\pi_0(m)$.
4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.
5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l à f en une étape ? en deux étapes ?
6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,4 \ 0,4 \ 0,2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1 . Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles regressent ?

Exercice 2 .¹ : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état R avec une probabilité 0,1 ; étant malade, il peut le rester avec probabilité 0,25 ou devenir immunisé avec probabilité 0,75 ; enfin, étant dans l'état R , il peut le rester avec probabilité 0,6 ou devenir malade avec probabilité 0,4.

1. On modélise la dynamique des individus de ce milieu par une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à trois états R , M et I . Ecrire la matrice de transition \mathbb{P} de cette chaîne de Markov.

2. Tracer le diagramme en points et flèches associé.

3. Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades, et 900 individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes ?

4. Même question si l'on suppose qu'il y a au départ 150 individus malades, 500 individus ni malades ni immunisés et 350 individus immunisés.

¹(Exercice inspiré du texte en ligne à <http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html>)