

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 1
Modèle de Lotka-Volterra

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

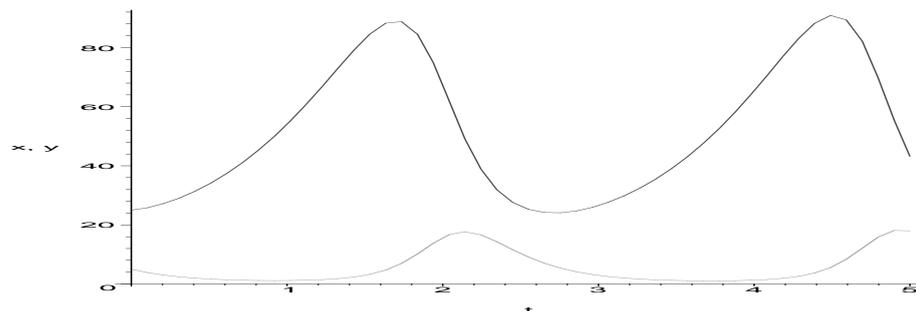
L'étude de l'évolution en interaction d'une population de babouins $B(t)$ (les proies) et d'une population de guépards $G(t)$ (les prédateurs) a conduit au modèle dynamique de Lotka-Volterra suivant :

$$\begin{cases} B'(t) = 1.2B(t) - 0.2B(t)G(t) \\ G'(t) = 0.1B(t)G(t) - 5G(t) \end{cases} \quad (1)$$

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, il y a 25 babouins et 5 guépards (donc $B(0) = 25$ et $G(0) = 5$) et on s'interroge pour savoir comment, lorsque t augmente, les effectifs de ces deux populations vont évoluer.

1. Calculer la dynamique des babouins en l'absence de guépards dans le cas où $B(0) = 25$. Esquissez le graphe de cette solution pour $0 \leq t \leq 2$.
2. De même, calculer la dynamique des guépards en l'absence de babouins si l'on suppose $G(0) = 5$. Ajouter son graphe au tracé précédent.

3. On a représenté sur la figure suivante l'évolution au cours du temps des deux populations pour $0 \leq t \leq 5$. Les deux fonctions $B(t)$ et $G(t)$ sont des fonctions périodiques de période T . Quelle est la valeur approximative de T ?

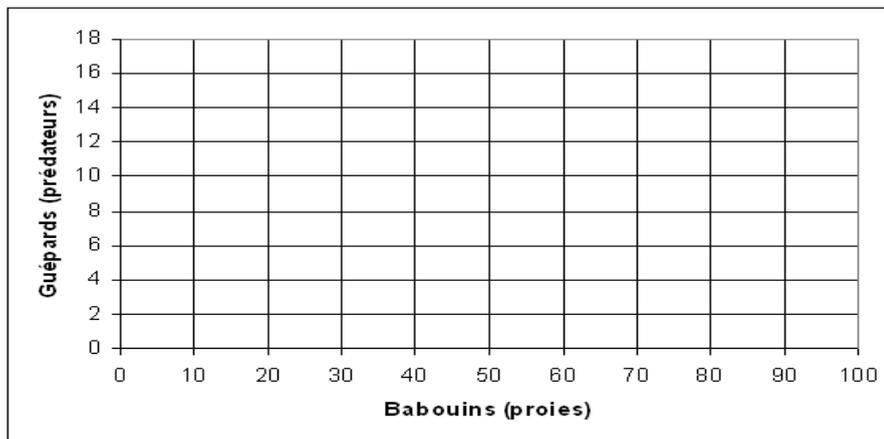


4. Expliquer la dynamique de chacune des deux populations de babouins et de guépards sur chacun des trois intervalles $[0, 1]$, $[1, 1.8]$ et $[1.8, 2.2]$ successivement en précisant leurs interactions.

5. On a calculé une solution approchée du système d'équations différentielles (1) et on a trouvé les valeurs suivantes :

t	0	0.25	0.5	1	1.5	1.75	2	2.25	2.75
$B(t)$	25	28	34	54	83	88	67	38	24
$G(t)$	5	3	2	1	3	7	16	16	6

On désigne par A_0 le point de coordonnées (25 ; 5), par A_1 celui de coordonnées (28 ; 3), et ainsi de suite jusqu'à A_6 . Placer les 7 points sur la figure ci dessous puis en déduire l'allure de la trajectoire du système (1) issue du point A_0 .



6. Les populations de babouins et de guépards oscillent entre deux valeurs minimale et maximale. Déterminer approximativement ces deux valeurs extrêmes pour chacune des deux populations.

7. Reprendre les deux questions précédentes avec une nouvelle condition initiale de 70 babouins et 10 guépards :

t	0	0.25	0.5	1	1.5	1.75	2	2.25	2.75
$B(t)$	70	52	37	31	41	50	61	72	70
$G(t)$	10	13	11	5	2	2	2	3	10

8. Tracer, sur un même dessin, les graphes des fonctions $B(t)$ et $G(t)$ de condition initiale $B(0) = 70$ et $G(0) = 10$.