NOM : Corrigé

PRENOM :

Date : 27 septembre - 1e Octobre 2010 .

Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 3
Distribution stationnaire d'une chaine de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. :

1. Soit la matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^3$. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$, ...

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \times \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.0+1.0+0.1 & 0.1+1.0+0.0 & 0.0+1.1+0.0 \\ 0.0+0.0+1.1 & 0.1+0.0+1.0 & 0.0+0.1+1.0 \\ 1.0+0.0+0.1 & 1.1+0.0+0.0 & 1.0+0.1+0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.0+0.0+1.1 & 0.1+0.0+1.0 & 0.0+0.1+1.0 \\ 1.0+0.0+0.1 & 1.1+0.0+0.0 & 1.0+0.1+0.0 \\ 0.0+1.0+0.1 & 0.1+1.0+0.0 & 0.0+1.1+0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Identit}$$

Donc $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P} = \mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ $\quad \mathbb{P}^6 = \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P} = \mathbb{P}^3 = Id$ $\quad \mathbb{P}^7 = \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P} = \mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}^8 = \mathbb{P}^2$,

2. En déduire que $\mathbb{P}$ n'est pas une matrice primitive.

Toutes les puissances de $\mathbb{P}$ ont des coefficients nuls, donc $\mathbb{P}$ n'est pas une matrice primitive.

3. Pour $\pi_0 = (\alpha\,;\beta\,;\gamma)$, calculer les images successives $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$, ...Qu'observez-vous ?

$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (\alpha.0+\beta.0+\gamma.1,\ \alpha.1+\beta.0+\gamma.0,\ \alpha.0+\beta.1+\gamma.0) = (\gamma, \alpha, \beta)$

$\pi_2 = \pi_1 \mathbb{P} = (\beta, \gamma, \alpha) \quad \pi_3 = \pi_2 \mathbb{P} = (\alpha, \beta, \gamma) = \pi_0 \quad \pi_4 = \pi_3 \mathbb{P} = \pi_1 \quad \ldots$

On boucle comme la suite des puissances de $\mathbb{P}$.

4. Trouver un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ de valeur propre $\lambda = 1$.

On cherche π_0 tel que $\pi_0 \mathbb{P} = \pi_0$ c'est à dire $(\gamma, \alpha, \beta) = (\alpha, \beta, \gamma)$ donc $\alpha = \beta = \gamma$. Le vecteur $(1,1,1)$ convient :

$$(1,1,1)\,\mathbb{P} = (1,1,1)$$

Remarque : on prend $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ si on veut un vecteur stochastique.

Exercice 2. : On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies, zèbres (z), antilopes (a) et gnous (g) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple (gzzaggaa). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie z (ou a ou g) après avoir mangé une autre proie ne dépend pas de ce qu'il avait mangé avant z et que cette probabilité est invariante au cours du temps. D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{z, a, g\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} z & a & g \end{array} \\ \mathbb{P} = & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z \\ a \\ g \end{array} \end{array}$$

1. On suppose que la répartition initiale observée des trois populations de proies est $\pi_0 = (0.5\,; 0.3\,; 0.2)$. Calculer la nouvelle répartition après une étape. Commentez.

$\pi_0 \mathbb{P} = (0,5 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,5 \;;\; 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 \;;\; 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3)$

$= (0,52 \;;\; 0,29 \;;\; 0,19)$

Les zèbres augmentent un peu, les antilopes et les gnous diminuent un peu

2. Calculer la proba d'une trajectoire du type (axa), où x est une proie quelconque pouvant être soit z, soit a, soit g. A noter qu'on peut calculer cette probvabilité comme l'un des coefficient de $\mathbb{P}^2$: expliquer pourquoi.

$p(axa) = p(aza) + p(aaa) + p(aga) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,2$

$= 0,35$

C'est le coefficient de la 2e ligne 2e colonne de $\mathbb{P}^2$ qui donne la probabilité de passer de antilope à antilope en deux étapes.

3. La distribution π_0 suivante est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ? Justifier votre réponse.

S	z	a	g
π_0	$\frac{11}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{21}$

$\pi_0 \mathbb{P} = \left(\frac{11}{21} \cdot 0,6 + \frac{6}{21} \cdot 0,4 + \frac{4}{21} \cdot 0,5 \;;\; \frac{11}{21} \cdot 0,2 + \frac{6}{21} \cdot 0,5 + \frac{4}{21} \cdot 0,2 \;;\; \frac{11}{21} \cdot 0,2 + \frac{6}{21} \cdot 0,1 + \frac{4}{21} \cdot 0,3\right) = \left(\frac{11}{21} \;;\; \frac{6}{21} \;;\; \frac{4}{21}\right) = \pi_0$

La distribution π_0 est donc stationnaire.

4. Si dans cette portion de savane la population de zèbres est au départ bien supérieure à celle des deux autres types de proies, va-t-elle, selon ce modèle, diminuer, augmenter ou rester prépondérante ? Expliquer.

La matrice $\mathbb{P}$ est primitive : aucun coefficient n'est nul. Le théorème de Perron-Frobenius s'applique : quelque soit la distribution initiale on tendra vers la distribution stationnaire de la question 3. Les zèbres tendent à être un peu plus de la moitié des proies, $\frac{11}{21}$ exactement.