NOM : Date : Février 2011
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 3
Méthode d'Euler

On a vu déjà comment calculer à l'aide de la méthode d'Euler une approximation de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(y)$ de condition initiale $y(0) = y_0$ pour une suite d'instants $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$. Pour cela on a calculé la valeur approchée de $y(t_{n+1})$, notée y_{n+1}, par récurrence à partir de celle de $y(t_n)$, notée y_n par la fomule $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$, où $h = t_{n+1} - t_n$ est le *pas de temps*. On rappelle que l'idée de cette méthode est d'approcher la solution exacte $y(t)$ par sa tangente sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, tangente que l'on peut calculer facilement car on connait y' qui vaut $f(y)$.

En utilisant la même idée, on peut également calculer une approximation de la solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y) \end{array} \right. \tag{1}$$

issue du point $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$ par la récurrence suivante appelée aussi *schéma d'Euler :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} & = & y_n + hg(x_n, y_n) \end{array} \right. \tag{2}$$

où le pas de temps h est supposé petit.

Exercice 1. : On considère le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 3x(1 - 0.02y) \\ y' & = & 0.1y(x - 50) \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Calculer les deux équilibres puis représenter approximativement l'allure de la trajectoire $(x(t), y(t))$ de ce système issue du point $M_0 = (x(0), y(0)) = (80, 10)$.

2. Calculer la valeur du champ de vecteurs associé à ce système au point M_0, c'est-à-dire les deux composantes du vecteur $V_0 = (f(x(0), y(0)), g(x(0), y(0)))$, puis représenter sur un dessin le point M_0 et le vecteur V_0.

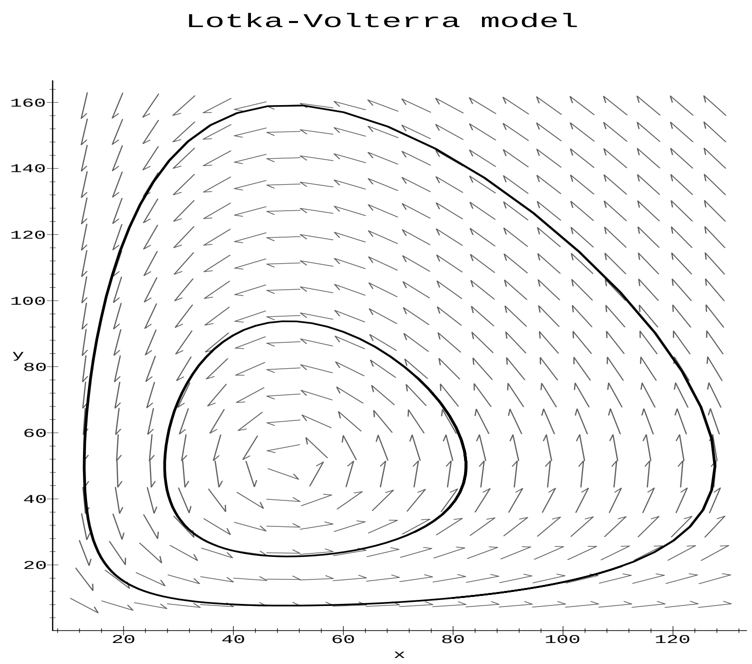
3. Voici la suite des valeurs obtenues par le schéma d'Euler pour cette trajectoire entre $t_0 = 10$ et $t_0 + 6h$:

t	t_0	t_0+h	t_0+2h	t_0+3h	t_0+4h	t_0+5h	t_0+6h
x_n	80	89.6	99.9	....	121.7	131.76	139.47
y_n	10	11.5	13.77	....	22.45	30.5	42.97

A partir des deux premières valeurs de cette suite, déterminer combien vaut h ici puis tracer le point M_1 de coordonnées (x_1, y_1) sur la figure précédente.

4. Compléter les deux valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

5. Placer les points de la suite (x_n, y_n) sur la figure suivante. Sont-ils situés sur la solution elle-même ? Expliquer pourquoi ?



6. Après un tour complet, les points de cette suite formeront-ils un cycle, une spirale entrante, une spirale sortante ? Expliquez.

7. Pouvez-vous donner une valeur indicative de la période de la trajectoire issue du point M_0 ? Expliquer.

8. Calculer la valeur approximative de la trajectoire de M_0 à l'instant $t = t_0 - h$.

Exercice 2. **:** On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x \\ y' & = & y \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Vérifier que $(\frac{1}{2}e^t, e^t)$ est une solution. Que vaut cette solution en $t = 0$?

2. Représenter les isoclines ainsi que la trajectoire issue du point $M_0 = (\frac{1}{2}, 1)$ (on notera que si $x(t) = \frac{1}{2}e^t$ et $y(t) = e^t$ alors $y = 2x$).

3. Calculer quelques points de la suite (x_n, y_n) issue de M_0 et les placer sur la figure. Sont-ils situés sur la solution elle-même ? Expliquer pourquoi ?

4. Reprendre la question précédente en remplaçant M_0 par $N_0 = (2, 1)$.