NOM : Corrigé — Date :
PRENOM : — Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. :

1. Soit $H(x,y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$. Calculer les deux dérivées partielles de H.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{x} - 0{,}1 \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{y} - 0{,}2$$

$$\text{Grad } H(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \; ; \; \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\frac{4}{x} - 0{,}1 \; ; \; \frac{3}{y} - 0{,}2 \right)$$

2. Calculer la valeur de la fonction H puis la valeur de son vecteur gradient au point $(x = 50, y = 30)$.

$$\begin{aligned} H(50,30) &= 3\ln(30) - (0{,}2)(30) + 4\ln(50) - (0{,}1)(50) \\ &= 3\ln(30) - 6 + 4\ln(50) - 5 = \\ &\simeq 3(3{,}401) + 4(3{,}912) - 11 \simeq 14{,}852 \end{aligned}$$

$$\text{Grad } H(50,30) = \left(\frac{4}{50} - 0{,}1 \; ; \; \frac{3}{30} - 0{,}2 \right) = \left(-0{,}02 \; , \; -0{,}1 \right)$$

3. Trouver le gradient de la fonction $g(x,y) = 1 + ye^{2x}$ puis le calculer au point $(0,0)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2ye^{2x} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = e^{2x}$$

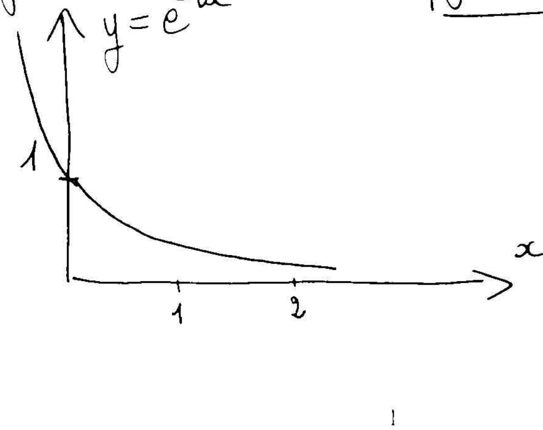
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1$$

$$\text{Grad } g(0,0) = (0 \; ; \; 1)$$

4. Calculer l'équation de la courbe de niveau $k = 2$ de la fonction g puis tracer cette courbe.

La courbe de niveau $k=2$ a pour équation $1 + ye^{2x} = 2$

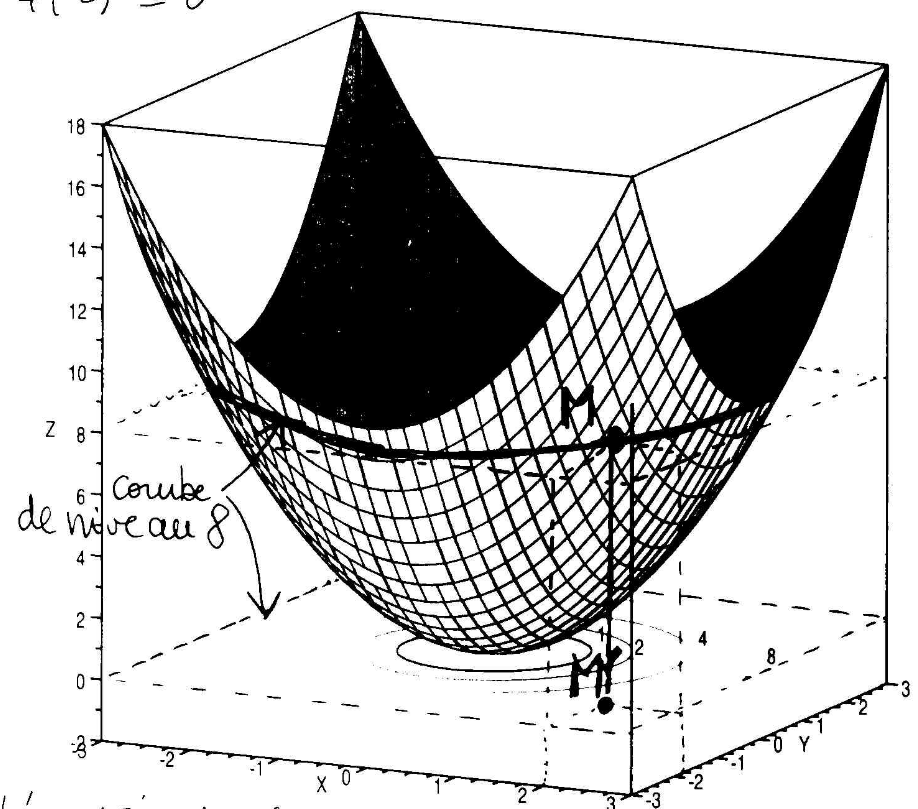
Donc $ye^{2x} = 1$ ou encore $\boxed{y = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}}$



Exercice 2. : Le dessin suivant représente le graphe de la fonction f de deux variables, $(x, y) \to x^2 + y^2$ puis quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. Calculer la hauteur (on dit la cote) du point M de la surface d'abscisse et d'ordonnée $M' = (2, -2)$. Marquer sur la première figure le point M et sa projection M' dans le plan $z = 0$. Tracer approximativement l'ensemble des points de la surface de même niveau que M et la projection de cette courbe. Quelle est l'équation de cette projection ?

cote de M :
$2^2 + (-2)^2 = 8$



$M \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$M' \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'équation de la courbe de niveau 8 est
$x^2 + y^2 = 8$. C'est un cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

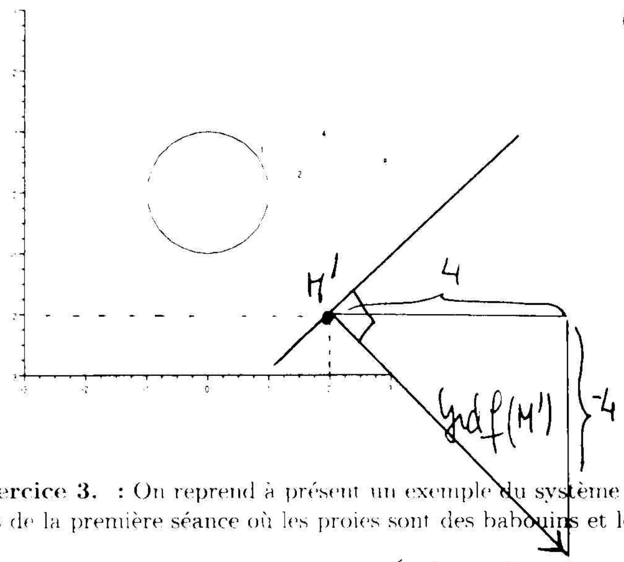
2. Dans le dessin suivant (qui représente les courbes de niveau de f), marquer le point M' et la courbe de niveau de f passant par M'. Quelle forme a cette courbe ? Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?

Calcul du gradient de $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ au point $M' = (2 ; -2)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$

$\text{Grad} f(2 ; -2) = (4 ; -4)$

On remarque que le vecteur $\text{grad}f(M') = \begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur perpendiculaire à la courbe de niveau de M', au point M'.



Exercice 3. : On reprend à présent un exemple du système de Lotka Volterra semblable à celui étudié lors de la première séance où les proies sont des babouins et les prédateurs des guépards :

$$\begin{cases} x' = 3x - 0.2xy \\ y' = -4y + 0.1xy \end{cases} \quad (1)$$

On va étudier la loi de conservation associée à ce système donnée par $H(x, y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$.

Sur le dessin suivant sont représentés le graphe de la fonction H et quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. On considère le point M' du plan $z = 0$ de coordonnées $M' = (50, 30)$. Calculer son image M par H, placer M sur la surface et sa projection M'. Représenter approximativement la courbe de niveau de M sur la figure du bas.

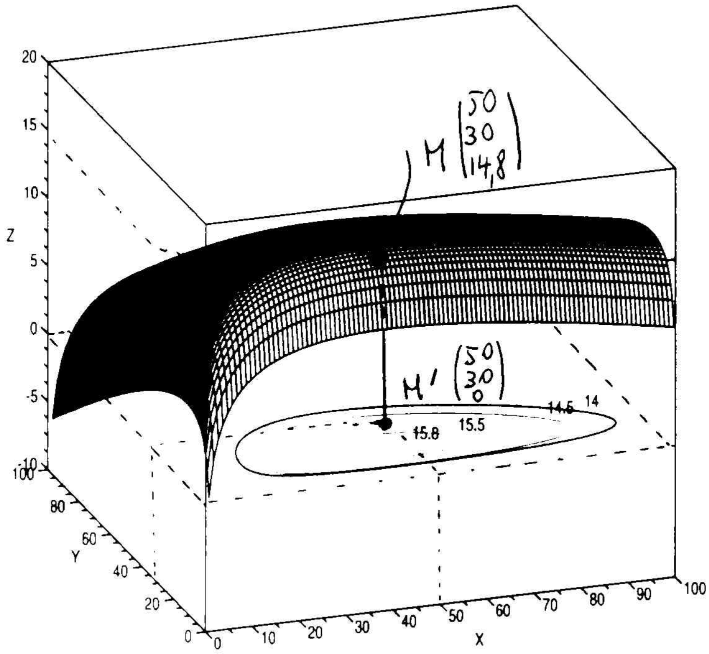
L'image de $M' = (50, 30)$ est le point M de cote $H(50, 30) = 14,852$ (calculé en 1) 2))

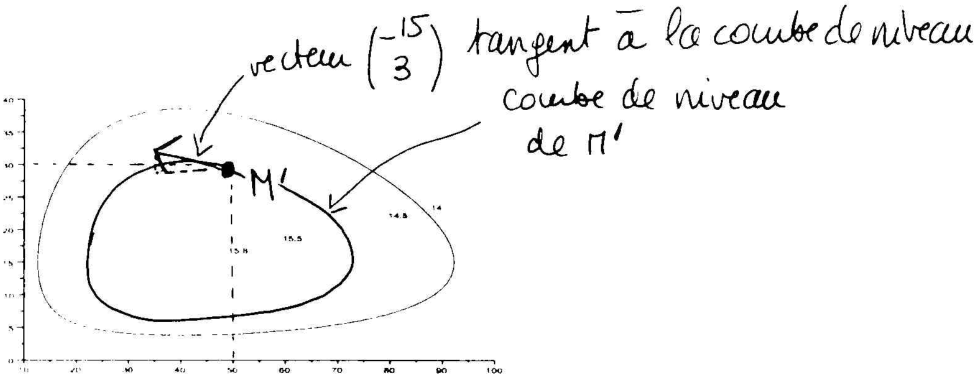
Donc M a pour coordonnés $\begin{pmatrix}50\\30\\14,852\end{pmatrix}$.

2. Calculer le vecteur gradient de H au point M' et tracer ce vecteur sur la figure du bas.

On a déjà calculé (Exercice 1) le gradient $\text{Grad}\,H(50,30)$

On a trouvé $(-0,02 \quad -0,1) = \frac{1}{100}(-2, -10)$.





3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées (x', y') d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur la figure du bas. Au point $M' = (50, 30)$, on a :

$$x' = 3x - 0.2xy = 150 - 300 = -150$$
$$y' = -4y + 0.1xy = -120 + 150 = 30$$
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}-15\\3\end{pmatrix}$$

On trace le vecteur $\begin{pmatrix}-15\\3\end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ qui serait 10 fois plus long (mais parallèle, dans le même sens)

4. Montrer qu'en tout point (x, y) le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra en calculant le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Il faut vérifier que le produit scalaire de $\text{grad}\,H(x,y)$ et de $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est nul :

$$\text{grad}\,H \cdot \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \left(\frac{4}{x} - 0.1\right)(3x - 0.2xy) + \left(\frac{3}{y} - 0.2\right)(-4y + 0.1xy)$$
$$= \cancel{12} - \cancel{0,3x} - \cancel{0.8y} + \cancel{0.02xy} + \cancel{(-12)} + \cancel{0.3x} + \cancel{0.8y} - \cancel{0.02xy}$$
$$= 0.$$