NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : 25 - 29 Octobre 2010 .

Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Equations différentielles

Exercice 1. : En théorie de l'apprentissage, les psychologues utilisent des courbes de performance $P(t)$ qui indiquent le niveau atteint à l'instant t par une personne qui acquiert une compétence. La dérivée $\frac{dP(t)}{dt}$ de $P(t)$, qui indique la vitesse d'acquisition de cette compétence, est supposée proportionelle à l'écart $M - P(t)$, où M est le niveau maximal atteignable par la personne (cela signifie qu'au début de l'apprentissage, celui-ci est rapide puis, à mesure que la personne approche du niveau maximal, sa vitesse d'acquisition diminue). On a donc pour $P(t)$ une équation différentielle de la forme

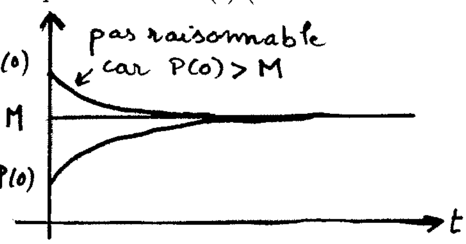
$$\frac{dP(t)}{dt} = k(M - P(t))$$

où $k > 0$ est une constante. Cette équation différentielle est-elle une équation linéaire ? Pourquoi ?

C'est une équation différentielle linéaire car elle est de la forme $\frac{dP(t)}{dt} = a(t)P(t) + b(t)$ avec $a(t) = -k$ et $b(t) = kM$.

Résoudre cette équation différentielle et indiquer l'allure d'une courbe de performance $P(t)$ (en choisissant une valeur raisonnable pour $P(0)$). Une solution particulière est $P^*(t) = M$, d'où $\frac{dP(t)}{dt} = 0$, c'est un équilibre. La solution générale est donc

$P(t) = (P(0) - M)e^{-kt} + M$ car $\int_0^t a(t)dt = \int_0^t -k\,dt = -kt$



Exercice 2. : Soit l'équation différentielle $y' = 2y - 3e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.

$y'(t) = -Ae^{-t}$. On doit donc avoir $-Ae^{-t} = 2Ae^{-t} - 3e^{-t}$, soit $-A = 2A - 3$ d'où $3A = 3$ et donc $A = 1$.

La solution particulière est $y^*(t) = e^{-t}$

2. En déduire la solution générale de l'équation.

Pour avoir la solution générale on calcule $\int_0^t a(t)dt = \int_0^t 2\,dt = 2t$.

D'où la solution générale :

$y(t) = e^{-t} + (y(0) - 1)e^{2t}$

3. Trouver la solution particulière de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Calculer sa valeur en $t = \frac{1}{10}$.

En remplaçant $y(0)$ par $1/2$ dans la formule précédente on obtient la solution particulière $y(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

et donc $y(1/10) = e^{-1/10} - \frac{1}{2}e^{2/10} \simeq 0,294$

Exercice 3. : Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellment à la concentration. Si $N(t)$ désigne la concentration à l'instant t cette dynamique peut s'écrire $\frac{dN(t)}{dt} = R - KN(t)$. Selon ce modèle, la concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?

On cherche pour quel $N(t)$ on a $R - KN(t) = 0$, on trouve $N(t) = R/K$ et $\frac{dN(t)}{dt} = 0$. C'est un équilibre.

On pose $f(N) = R - KN$. On a $f'(N) = -K < 0$ car K est une constante positive qui détermine à quelle vitesse les nutriments sortent de la cellule. $N(t) = R/K$ est donc un équilibre stable. Les autres solutions vont tendre vers cet équilibre.

Exercice 4. :

1. Montrer que l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 5\cos t$$

possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ puis l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle.

$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = -A\sin(t) + B\cos(t)$. On doit donc avoir $-A\sin(t) + B\cos(t) = -2A\cos(t) - 2B\sin(t) + 5\cos(t)$, soit $(-2A - B + 5)\cos(t) + (A - 2B)\sin(t) = 0$, d'où $\begin{cases} -2A - B + 5 = 0 \\ A - 2B = 0 \end{cases}$ et donc $A = 2$ et $B = 1$

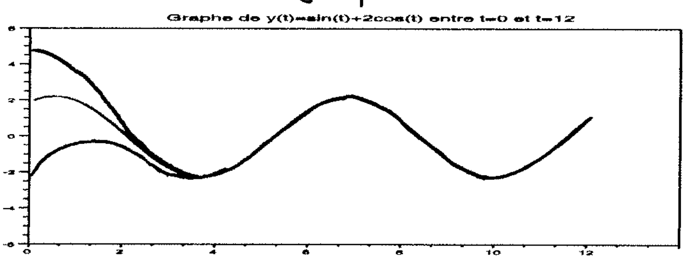
On a la solution particulière $\hat{y}(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$ et donc $\hat{y}(0) = 2$.

Pour calculer la solution générale on calcule $\int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t -2\,dt = -2t$

La solution générale est donc $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t) + (y(0) - 2)\, e^{-2t}$

2. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation sur la figure ci-dessous et décrire leur comportement lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un *équilibre dynamique.*

Lorsque t tend vers l'infini les graphes des solutions de l'équation



tendent vers le graphe de la solution particulière $\hat{y}(t)$ car e^{-2t} tend vers zéro.