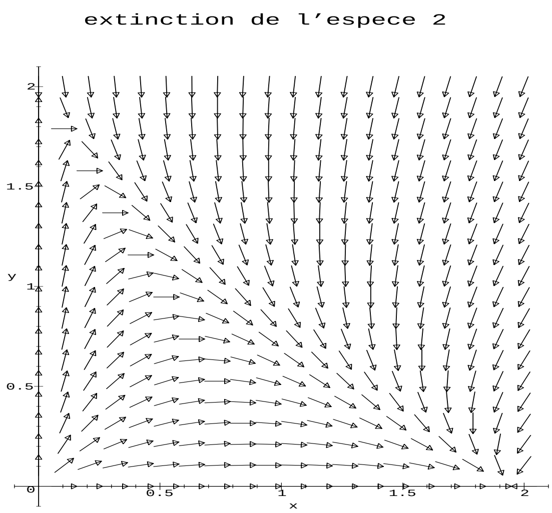
NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Divers examples de modèles dynamiques

Les deux exercices qui suivent concernent la dynamique de *deux populations en compétition*, dont nous avons vu un premier exemple lors de la séance 2. Notre objectif dans les deux cas est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations.

Exercice 1. : Le premier exemple illustre ce que l'on appelle le *principe d'exclusion compétitive*. Voici son système différentiel et, plus bas, son champs de vecteurs :

$$\begin{cases} x' = (1 - 0.5x - 0.33y)x \\ y' = (1 - x - 0.5y)y \end{cases} \quad (1)$$



1. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines $x' = 0$ du système (1).

2. Même question pour les deux isoclines $y' = 0$.

3. A droite de la figure, tracer dans un plan (x, y) les isoclines du système puis tracer dans chaque région (et sur les isoclines) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs.

4. Combien le système (1) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées, les repérer sur la figure.

5. Déterminer la nature de chaque équilibre (noeud, col, foyer ou centre) et vérifier vos résultats sur votre figure. Ajouter quelques trajectoires.

6. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle : vont-elles coexister ou l'une d'elle va-t-elle disparaître ? Expliquer.

7. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (1) issue du point $M = (2, 1)$.

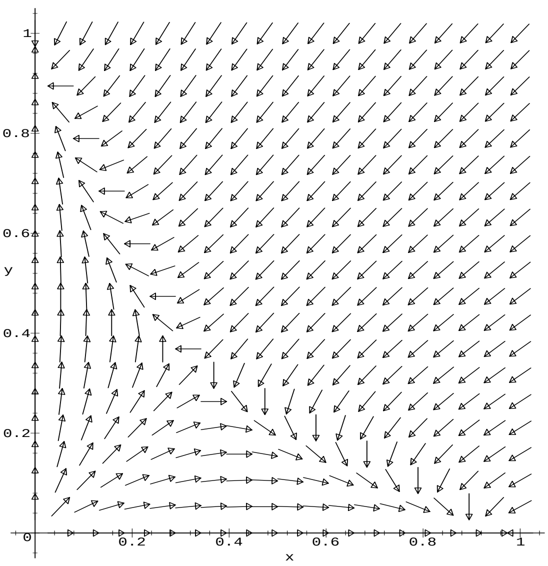
Exercice 2. **:** La figure suivante représente le champs de vecteurs associé à un autre système de deux espèces en compétition

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (1 - x - 2y)x \\ y' & = & (1 - 2x - y)y \end{array} \right. \tag{2}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ s'expriment en milliers d'individus.

1. Ajouter sur ce dessin les isoclines et les points d'équilibre (indiquer vos calculs ci-dessous).

`coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes`



2. Déterminer la nature des équilibres.

3. Tracer la trajectoire issue de $(1, 1)$. Peut-on parler dans ce cas de coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

4. Même question pour la trajectoire issue du point $(1, 1 - \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ petit.

5. Même question pour la trajectoire issue du point $(1 - \varepsilon, 1)$.

6. Expliquer pourquoi la dynamique de ce modèle conduit en général à l'extinction de l'une des deux populations.

Exercice 3. **:** On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassins ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais il est supposé constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' & = & -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{array} \right. \tag{3}$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur*. On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Quel est, selon ce modèle, le taux de mortalité par tête des poissons ? Que représente les coefficients β_1 et β_2 ?

2. Ecrire le système différentiel pour ce modèle puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et y'=0 et les coordonnées de l'équilibre.

3. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ tracer les deux isoclines, et dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé.

4. Peut-on en déduire le comportement des deux populations lorsque t tend vers $+\infty$?