

NOM :
 PRENOM :

Date : 2 - 5 Novembre 2010 .

Groupe :

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles (suite)

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation¹, indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance?).

2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale?

3. Remplir les valeurs manquantes de la solution $y(t)$ dans la première ligne du tableau ci dessous :

t	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$
$y(t) = \frac{10}{1-t}$	10	10,345	-----	11,111	11,538	12	14,286	-----
$\hat{y}(t)$	10	xxxx	-----	xxxx	-----	xxxx	xxxx	14,483
$\tilde{y}(t)$	10	-----	10,689	11,070	11,478	11,918	14,062	-----

4. La seconde ligne du tableau calcule la valeur approchée $\hat{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant un pas de deux jours ($2/30$). Compléter les deux valeurs manquantes. Comparer avec la solution exacte.

5. La troisième ligne du tableau calcule la valeur approchée $\tilde{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant cette fois un pas d'une journée. Compléter les deux valeurs manquantes et commentez.

6. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définit cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.

¹On pourrait la résoudre en la réécrivant $\frac{dy}{y^2} = 0,1dt$ puis en intégrant les deux termes

Exercice 2. : L'écologiste W.C. Allee (1931) fut l'un des premiers à étudier de façon détaillée l'effet de la densité d'une population sur son taux de croissance en mettant notamment en évidence le fait, connu aujourd'hui sous le nom d'*effet Allee*, qu'une densité trop faible peut altérer la capacité de reproduction ou de survie de la population. Une bonne connaissance de cet effet est notamment importante lors des programmes de réintroduction d'espèces menacées ou disparues car ces programmes concernent presque toujours un tout petit nombre d'individus, cet effet peut être l'une des causes d'échec de ces programmes de conservation.

Étudions cet effet sur un exemple :

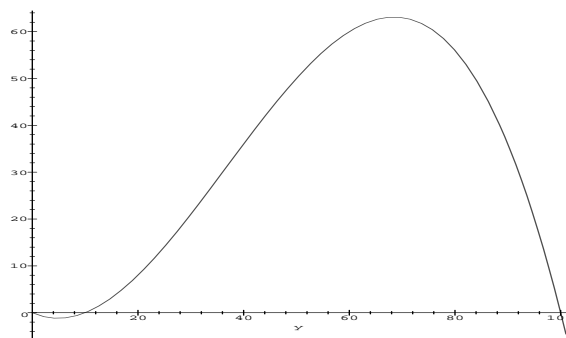
En observant la dynamique d'une population d'écureuils, on a pu faire les observations suivantes :

- Si la population est trop grande, le taux de croissance décroît ou même devient négatif.
- Si la population est trop petite, les écureuils en âge de se reproduire courent le risque de ne pas trouver de partenaire et donc, là encore, le taux de croissance est négatif.

On propose le modèle dynamique suivant pour cette population d'écureuils, k , N et M étant des constantes positives telles que $N > M$:

$$y' = ky \left(1 - \frac{y}{N}\right) \left(\frac{y}{M} - 1\right)$$

1. Voici le graphe de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$, dans le cas où $k = 0,5$, $M = 10$ et $N = 100$.



Calculer les équilibres de ce modèle et déterminer leur stabilité à l'aide du graphique.

2. Donner l'expression développée de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$ puis calculer sa dérivée en $y = 0$. L'utiliser pour vérifier la stabilité de l'équilibre $y^* = 0$ en utilisant le critère de stabilité.

3. Faire une esquisse des graphes de quelques solutions $(t, y(t))$ et indiquer ce qu'il advient de la population d'écureuils selon ce modèle (explosion, extinction, ...) dans les trois cas suivants, $y(0) = 9$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 20$.

4. On a calculé les valeurs approchées par la méthode d'Euler de deux solutions dans le tableau suivant. Choisir l'une des valeurs (différente de celle de vos voisins proches) et détailler les calculs permettant de l'obtenir à partir de la valeur située dans la case précédente du tableau.

t	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$
$y_n(t)$	9	8,96	8,92	8,87	8,83	8,78	8,73	8,68
$y_n(t)$	20	20,8	21,69	22,68	23,79	25,04	26,46	28,06

5. S'il y avait un programme de réintroduction de cette population, quel serait le minimum raisonnable d'individus qu'il faudrait réintroduire pour qu'il y ait une chance d'obtenir un résultat durable? Expliquer pourquoi.