NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : 2 - 5 Novembre 2010 .

Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles (suite)

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation[1], indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance ?). $y^2(t)$ est positif donc $\frac{dy(t)}{dt}$ est positive donc $y(t)$ est croissante.

2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale ?

$$\frac{dy(t)}{dt} = -10 \times \frac{-1}{(1-t)^2} = \frac{10}{(1-t)^2} \qquad 0,1\,y^2(t) = 0,1 \times \frac{10^2}{(1-t)^2} = \frac{10}{(1-t)^2}$$

Donc $\frac{10}{1-t}$ est bien une solution de l'équation. Sa valeur initiale est $y(0) = \frac{10}{1-0} = 10$.

3. Remplir les valeurs manquantes de la solution $y(t)$ dans la première ligne du tableau ci dessous :

t	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	.....	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$
$y(t) = \frac{10}{1-t}$	10	10,345	10,714	11,111	11,538	12	.....	14,286	15
$\hat{y}(t)$	10	xxxx	10,667	xxxx	11,425	xxxx	.....	xxxx	14,483
$\tilde{y}(t)$	10	10,333	10,689	11,070	11,478	11,918	.....	14,062	14,721

4. La seconde ligne du tableau calcule la valeur approchée $\hat{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant un pas de deux jours (2/30). Compléter les deux valeurs manquantes. Comparer avec la solution exacte.

5. La troisième ligne du tableau calcule la valeur approchée $\tilde{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant cette fois un pas d'une journée. Compléter les deux valeurs manquantes et commentez.

$\hat{y}(2/30) = 10 + 2/30 \times 0,1 \times 10^2 \simeq 10,667$ $\quad \hat{y}(4/30) = 10,667 + 2/30 \times 0,1 \times (10,667)^2 \simeq 11,425$

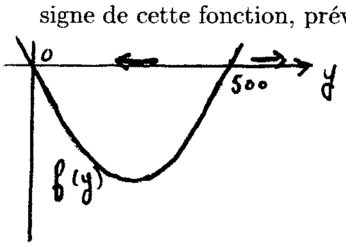
$\tilde{y}(1/30) = 10 + 1/30 \times 0,1 \times 10^2 \simeq 10,333$ $\quad \tilde{y}(10/30) = 14,062 + 1/30 \times 0,1 \times (14,062)^2 \simeq 14,721$

$\hat{y}$ et $\tilde{y}$ sont proches mais en dessous de la vraie solution y. $\tilde{y}$ est plus proche de y que $\hat{y}$

6. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définie cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.



On a deux équilibres $y(t) = 0$ et $y(t) = 500$.

Si $0 < y(0) < 500$ $f(y) < 0$ donc $y(t)$ décroît vers 0.

Si $y(0) > 500$ $f(y) > 0$ donc $y(t)$ croît vers $+\infty$.

[1] On pourrait la résoudre en la réécrivant $\frac{dy}{y^2} = 0,1dt$ puis en intégrant les deux termes

Exercice 2. : L'écologiste W.C. Allee (1931) fut l'un des premier à étudier de façon détaillée l'effet de la densité d'une population sur son taux de croissance en mettant notamment en évidence le fait, connu aujourd'hui sous le nom d'*effet Allee*, qu'une densité trop faible peut altérer la capacité de reproduction ou de survie de la population. Une bonne connaissance de cet effet est notamment importante lors des programme de réintroduction d'espèces menacées ou disparues car ces programmes concernant presque toujours un tout petit nombre d'individus, cet effet peut être l'une des causes d'échec de ces programmes de conservation.

Etudions cet effet sur un exemple :

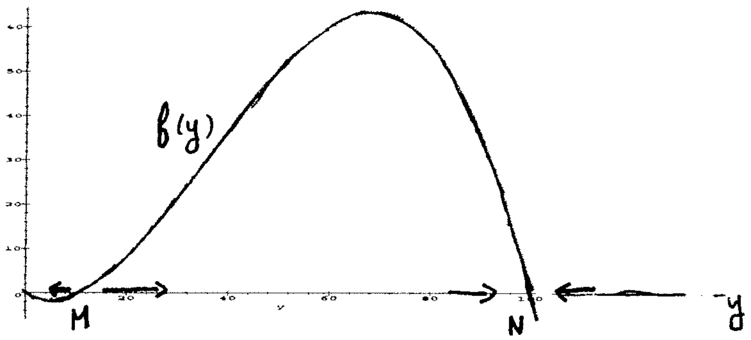
En observant la dynamique d'une population d'écureuils, on a pu faire les observations suivantes :

- Si la population est trop grande, le taux de croissance décroît ou même devient négatif.
- Si la population est trop petite, les écureuils en age de se reproduire courent le risque de ne pas trouver de partenaire et donc, là encore, le taux de croissance est négatif.

On propose le modèle dynamique suivant pour cette population d'écureuils, k, N et M étant des constantes positives telles que $N > M$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right)$$

1. Voici le graphe de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$, dans le cas où $k = 0,5$, $M = 10$ et $N = 100$.



Calculer les équilibres de ce modèle et déterminer leur stabilité à l'aide du graphique.

L'étude de $y' = 0$ donc $f(y) = 0$ donne 3 équilibres : $y = 0$, $y = M = 10$, $y = N = 100$

Lorsque y est compris entre 0 et M $y' < 0$ et $y \searrow$, y compris entre M et N alors $y' > 0$ et $y \nearrow$, $y > N$ alors $y' < 0$ et $y \searrow$. Donc

si $y(0)$ est compris entre 0 et M $y \to 0$, 0 est stable,

si $y(0)$ est proche de M alors y s'en éloigne, M est instable,

si $y(0)$ est entre M et N ou $y(0) > N$ alors $y \to N$ donc N est stable.

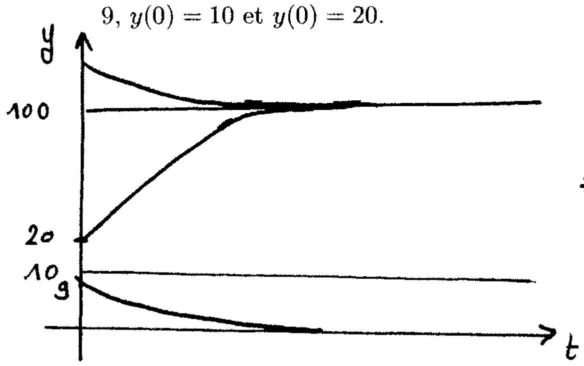
2. Donner l'expression développée de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$ puis calculer sa dérivée en $y = 0$. L'utiliser pour vérifier la stabilité de l'équilibre $y^* = 0$ en utilisant le critère de stabilité.

$f(y) = -ky + k\,y^2/M + k\,y^2/N - k\,y^3/MN$

$f'(y) = -k + 2ky/M + 2ky/N - 3ky^2/MN$

$f'(0) = -k < 0$ donc 0 est un équilibre stable.

3. Faire une esquisse des graphes de quelques solutions $(t, y(t))$ et indiquer ce qu'il advient de la population d'écureuils selon ce modèle (explosion, extinction, ...) dans les trois cas suivants, $y(0) = 9$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 20$.



* $y(0) = 9$: la population décroît vers 0 il y a extinction.

* $y(0) = 10$: c'est un équilibre, $y(t) = 10$ pour tout t, mais il est instable.

* $y(0) = 20$: la population croît puis la croissance ralentit et tend vers zéro tandis que la population tend vers 100.

4. On a calculé les valeurs approchées par la méthode d'Euler de deux solutions dans le tableau suivant. Choisir l'une des valeurs (différente de celle de vos voisins proches) et détailler les calculs permettant de l'obtenir à partir de la valeur située dans la case précédente du tableau.

t	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$
$y_n(t)$	9	8,96	8,92	8,87	8,83	8,78	8,73	8,68
$y_n(t)$	20	20,8	21,69	22,68	23,79	25,04	26,46	28,06

Dans la 2e ligne j'ai choisi de calculer $y_n(4/10)$ à partir de $y_n(3/10)$.

$$y_n(4/10) = y_n(3/10) + 1/10 \times y'(3/10) = y_n(3/10) + 1/10 \times f(y_n(3/10))$$
$$= 22,68 + 0,1 \times k\, 22,68\, (1 - 22,68/N)(22,68/M - 1)$$
$$= 22,68 + 0,1 \times 0,5 \times 22,68\, (1 - 22,68/100)(22,68/10 - 1)$$
$$= 22,68 + 1,134 \times 0,7732 \times 1,268 \simeq 22,68 + 1,1118$$
$$\simeq 23,79$$

5. S'il y avait un programme de réintroduction de cette population, quel serait le minimum raisonable d'individus qu'il faudrait réintroduire pour qu'il y ait une chance d'obtenir un résultat durable ? Expliquer pourquoi.

D'après le modèle si on part avec 10 individus ou moins on court à l'extinction. Si on est prudent on réintroduira une quinzaine d'individus pour pallier aux risques initiaux suivant la réintroduction. La population tendra alors à se stabiliser vers une centaine d'individus.