NOM : CORRIGÉ Date : .
PRENOM : Groupe : .

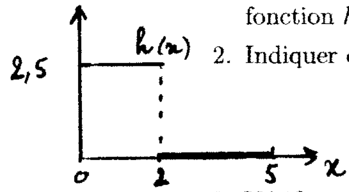
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2-2009-2010) : Feuille-réponses du TD 7
Un modèle simplifié du switch génétique

On considère un système de 2 gènes de niveau d'exspression x et y respectivement, ayant la dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & h(y) - ax \\ y' & = & h(x) - by \end{array} \right. \tag{1}$$

où h est une fonction en escalier qui modélise l'inhibition de chaque gène sur l'autre gène et où a et b sont des coefficients de dégradation que l'on supposera égaux pour simplifier, avec $a = b = 0.5$.

1. On suppose que $h(x)$ vaut 2.5 si $0 \leq x < 2$ et 0 si $2 \leq x \leq 5$. Tracer (en marge) le graphe de la fonction h.



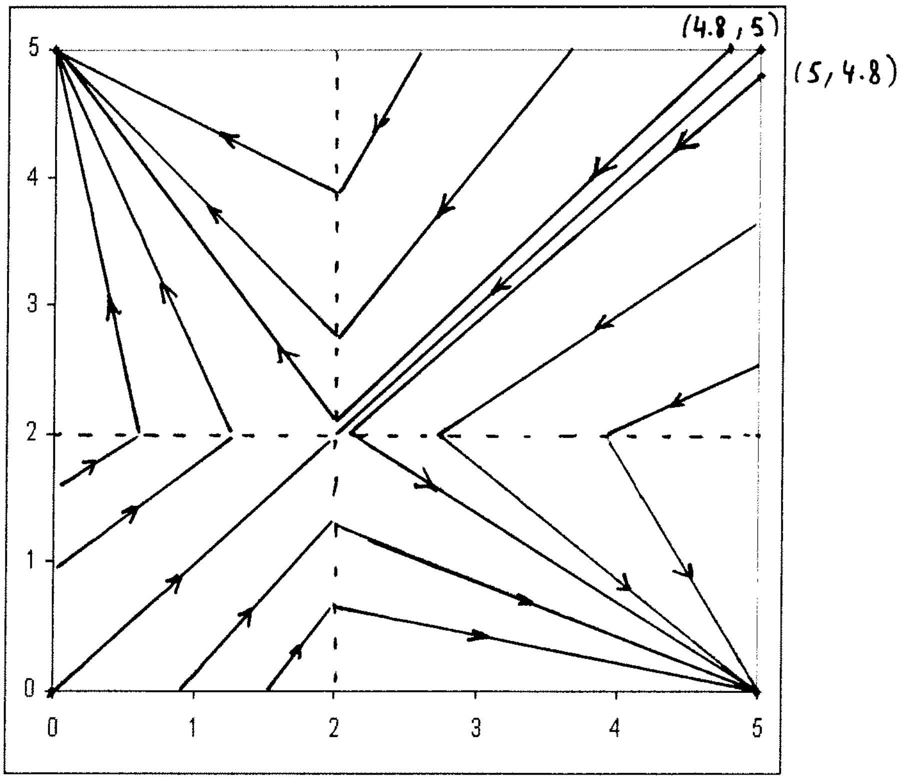
2. Indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le carré $2 \leq x < 5$, $2 \leq y < 5$

$h(x) = 0$ et $h(y) = 0$ donc
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -0,5x \\ y' & = & -0,5y \end{array} \right. \tag{2}$$

3. Vérifier que ses solutions sont de la forme ($x(t) = ce^{-0.5t}$ et $y(t) = de^{-0.5t}$) où c et d sont des constantes. Si $x(t) = ce^{-0,5t}$ et $y(t) = d\,e^{-0,5(t)}$ alors
$x'(t) = -0,5\,c\,e^{-0,5t} = -0,5\,x(t)$ et $y'(t) = -0,5\,d\,e^{-0,5t} = -0,5\,y(t)$

4. En déduire que les trajectoires sont des droites d'équation $y = \frac{d}{c}x$ et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire ci-dessous.

On a $y/x = de^{-0,5t}/ce^{-0,5t} = d/c$ donc $y = \frac{d}{c}x$



5. Expliquer pourquoi toutes les trajectoires de ce carré tendent vers le point $(0, 0)$, appelé le *point focal* du carré $[2\,;5] \times [2\,;5]$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} c\,e^{-0,5t} = 0$ de même $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} d\,e^{-0,5t} = 0$

Donc toutes les trajectoires tendent vers le point $(0, 0)$.

6. Indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le carré $0 \leq x < 2$, $0 \leq y < 2$

$h(x) = 2,5$ et $h(y) = 2,5$ donc

$$\begin{cases} x' = 2,5 - 0,5x \\ y' = 2,5 - 0,5y \end{cases} \quad (3)$$

7. Vérifier que ses solutions sont de la forme ($x(t) = 5 + ce^{-0.5t}$ et $y(t) = 5 + de^{-0.5t}$) où c et d sont des constantes.

Si $x(t) = 5 + ce^{-0,5t}$ alors $x'(t) = -0,5\,c\,e^{-0,5t}$ donc $2,5 - 0,5x(t) = 2,5 - 0,5(5 + ce^{-0,5t}) = -0,5\,ce^{-0,5t} = x'(t)$

De même si $y(t) = 5 + de^{-0,5t}$ alors $y'(t) = -0,5de^{-0,5t}$ donc $2,5 - 0,5y(t) = 2,5 - 0,5(5 + de^{-0,5t}) = -0,5\,de^{-0,5t} = y'(t)$

8. En déduire que les trajectoires dans ce carré ont aussi un point focal vers lequel elles tendent et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire dans la figure ci-dessus.

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 5$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5$ donc toutes les trajectoires tendent vers le point $(5, 5)$.

9. Reprendre les questions précédentes pour les deux rectangles restant et compléter le tracé des trajectoires dans la figure ci-dessus.

Dans le rectangle $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases}$ on a le système $\begin{cases} x' = 2,5 - 0,5x \\ y' = -0,5y \end{cases}$ dont les solutions sont

$x(t) = 5 + ce^{-0,5t}$

$y(t) = de^{-0,5t}$

qui tendent vers le point $(5, 0)$ quand t tend vers $+\infty$

Dans le rectangle $\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases}$ on a le système $\begin{cases} x' = -0,5x \\ y' = 2,5 - 0,5y \end{cases}$ dont les solutions sont

$x(t) = ce^{-0,5t}$

$y(t) = 5 + de^{-0,5t}$

qui tendent vers le point $(0, 5)$ quand t tend vers $+\infty$

10. On suppose que des perturbations extérieures (comme par exemple une induction chimique ou termique) déplace le système de l'état initial ($x_0 = 4.8$, $y_0 = 5$) à l'état initial ($x_0 = 5$, $y_0 = 4.8$). Quelle influence cela aura-t-il sur l'évolution des deux concentrations $x(t)$ et $y(t)$? Tracer les deux trajectoires correspondantes sur la figure précédente.

Si on part de $(4.8, 5)$ on tend vers $(0, 5)$ alors que si on part de $(5, 4.8)$ on tend vers $(5, 0)$: une petite différence initiale conduit à deux équilibres complètement différents.

11. Tracer les graphes $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ des deux composantes de la trajectoire issue du point ($x_0 = 4$, $y_0 = 5$).