

NOM :
PRENOM :

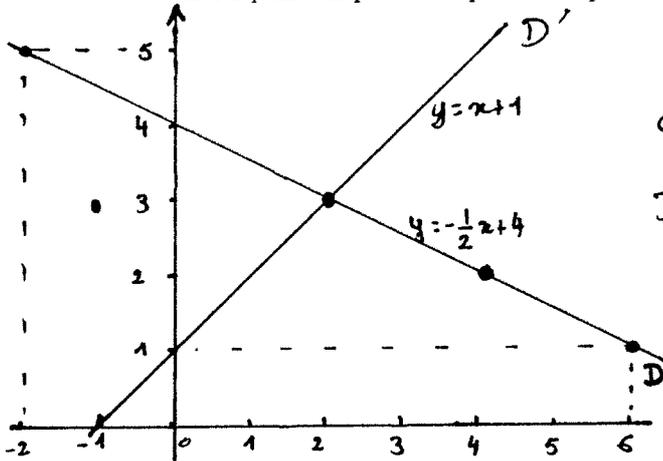
Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 9
Régression linéaire

Exercice 1. (Révisions) :

1. On considère la droite D passant par les deux points de coordonnées $(6; 1)$ et $(-2; 5)$. Tracer cette droite puis indiquer son équation en précisant sa pente et son ordonnée à l'origine.



$y = ax + b$ passe par $(6; 1)$ donc $6a + b = 1$
et par $(-2; 5)$ donc $-2a + b = 5$
On résout le système $\begin{cases} 6a + b = 1 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$

Donc $8a = -4$, la pente $a = -1/2$
 $1 + b = 5$, l'ordonnée à l'origine $b = 4$

L'équation de cette droite est

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

2. Sur le graphique précédent, tracer la droite D' d'équation $y = x + 1$. Les points suivants appartiennent-ils à la droite D , à la droite D' ? Expliquer. points choisis $(2; 3)$, $(4; 2)$ et $(-1; 3)$

$(2; 3)$ appartient à D car $-\frac{1}{2} \times 2 + 4 = 3$ et appartient à D' car $2 + 1 = 3$

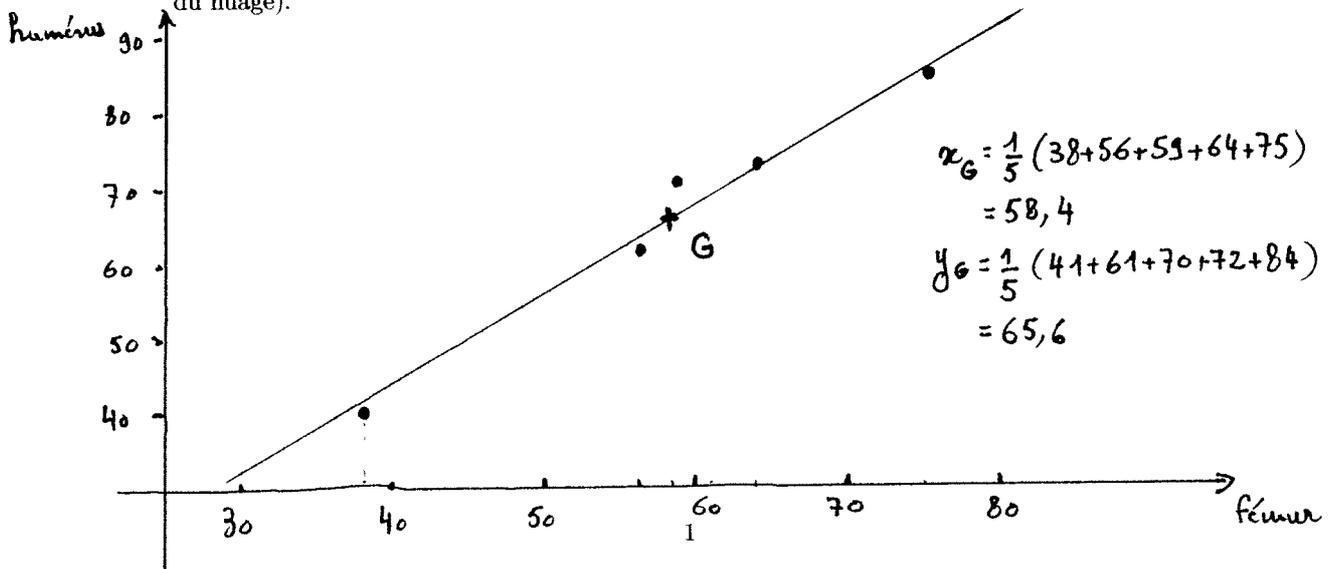
$(4; 2)$ appartient à D car $-\frac{1}{2} \times 4 + 4 = -2 + 4 = 2$, n'appartient pas à D' car $4 + 1 = 5 \neq 2$

$(-1; 3)$ n'appartient pas à D car $-\frac{1}{2} \times (-1) + 4 = 4,5 \neq 3$, ni à D' car $-1 + 1 = 0 \neq 3$

Exercice 2. : On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os, le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

| | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|
| x=fémur | 38 | 56 | 59 | 64 | 75 |
| y=humérus | 41 | 61 | 70 | 72 | 84 |

1. Tracer le nuage de points correspondant à ces données. Calculer les coordonnées de son centre de gravité G et ajouter ce point sur le dessin (en utilisant un autre symbole que celui des autres points du nuage).



$$x_G = \frac{1}{5} (38 + 56 + 59 + 64 + 75) = 58,4$$

$$y_G = \frac{1}{5} (41 + 61 + 70 + 72 + 84) = 65,6$$

2. Compléter le tableau suivant et en déduire les valeurs des variances et covariance demandées :

| i | x_i | y_i | x_i^2 | y_i^2 | $x_i y_i$ |
|-----------|-------|-------|---------|---------|-----------|
| 1 | 38 | 41 | 1444 | 1681 | 1558 |
| 2 | 56 | 61 | 3136 | 3721 | 3416 |
| 3 | 59 | 70 | 3481 | 4900 | 4130 |
| 4 | 64 | 72 | 4096 | 5184 | 4608 |
| 5 | 75 | 84 | 5625 | 7056 | 6300 |
| Moyenne : | 58,4 | 65,6 | 3556,4 | 4584,4 | 4002,4 |

$$\text{Var}(x) = 3556,4 - (58,4)^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \mu_x^2$$

$$\text{Var}(y) = 4584,4 - (65,6)^2 = \frac{1}{n} \sum y_i^2 - \mu_y^2$$

$$\text{Cov}(x,y) = 4002,4 - 58,4 \times 65,6 = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

| | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| $\text{Var}(x) = 145,84$ | $\text{Var}(y) = 205,04$ | $\text{cov}(x,y) = 171,36$ |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------|

3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, l'équation de la droite de régression de y en x .

$$\hat{a} = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{Var}(x)} = \frac{171,36}{145,84} \approx 1,175$$

$$\hat{b} = \mu(y) - \hat{a} \mu(x) = 65,6 - 1,175 \times 58,4 \approx -3,019$$

points calculés pour le tracé de la droite de régression
(30; 32,23) (80; 90,96)

| |
|----------------------|
| $y = 1,175x - 3,019$ |
|----------------------|

4. Tracer cette droite sur le graphique de la première question. Passe-t-elle par G? Expliquez pourquoi.

$G = (x_G; y_G) = (\mu(x); \mu(y))$. Ce point vérifie-t-il l'équation de la droite de régression?

$$\hat{a} x_G + \hat{b} = \hat{a} \mu(x) + (\mu(y) - \hat{a} \mu(x)) = \mu(y) = y_G$$

Donc G est sur la droite de régression.

5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire; commenter. $\rho(x,y) = 0,991$

$$\rho(x,y) = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \text{Var}(y)}} = \frac{171,36}{\sqrt{145,84 \times 205,04}} \approx 0,991$$

$\rho(x,y)$ est très proche de 1 : l'approximation du nuage de points par la droite des moindres carrés est très bonne.

6. Calculer la longueur, selon ce modèle, de l'humérus d'un spécimen dont le fémur mesurerait 50cm.

$$\begin{aligned} \text{longueur de l'humérus} &= 1,175 \times 50 \text{ cm} - 3,019 \\ &\approx 55,73 \text{ cm} \end{aligned}$$