NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : .
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses de l'épreuve finale
Janvier 2011 (Durée 2 heures)

Calculatrice autorisée. Une feuille manuscrite RV autorisée. Usage du téléphone interdit

Exercice 1. : Pour étudier le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème, on considère une chaine de Markov à 4 états : la molécule est dans le sol (état s), la molécule est dans l'herbe (état h), la molécule a été absorbée par du bétail (état b) et enfin la molécule est sortie de l'écosystème (état e). On pense que la matrice de transition de cette chaine de Markov est la suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & h & b & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/5 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/5 & 1/20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} s \\ h \\ b \\ e \end{array}$$

1. Calculer les deux probabilités manquantes et commenter les valeurs que vous obtenez en terme de dynamique du phosphore. La somme des coefficients d'une ligne vaut 1 donc

$3/5 + 3/10 + P(X_1 = b / X_0 = s) + 1/10 = 1 \quad P(X_1 = b / X_0 = s) = 1 - 10/10 = 0$

$1/10 + 2/5 + P(X_1 = b / X_0 = h) + 0 = 1 \quad P(X_1 = b / X_0 = h) = 1 - 5/10 = 1/2$

Le phosphore dans l'herbe a 1 chance sur 2 de passer dans le bétail, celui dans le sol ne passe pas dans le bétail.

2. Calculer l'image π_1 de la distribution initiale $\pi_0 = (1 ; 0 ; 0 ; 0)$ en explicitant vos calculs.

$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$ donc $\pi_1(s) = 1 \times 3/5 + 0 \times 1/10 + 0 \times 3/4 + 0 \times 0 = 3/5$

$\pi_1(h) = 1 \times 3/10 + 0 \times 2/5 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 3/10 \quad \pi_1(b) = 1 \times 0 + 0 \times 1/2 + 0 \times 1/5 + 0 \times 0 = 0$

$\pi_1(e) = 1 \times 1/10 + 0 \times 0 + 0 \times 1/20 + 0 \times 1 = 1/10$

$\pi_1 = (\underset{s}{3/5}, \underset{h}{3/10}, \underset{b}{0}, \underset{e}{1/10})$ la somme des composantes fait 1

3. Calculer la probabilité de la trajectoire suivante : s, h, b, e en fonction de la probabilité $\pi_0(s)$ de se trouver dans l'état s à l'instant initial.

$\pi_0(s)\, P(X_1 = h / X_0 = s)\, P(X_2 = b / X_1 = h)\, P(X_3 = e / X_2 = b)$

$= \pi_0(s)\, 3/10 \times 1/2 \times 1/20 = \pi_0(s)\, 3/400$

4. Dans ce modèle la distribution $\pi_0 = (0 ; 0 ; 0 ; 1)$ est une distribution stationnaire. Expliquer pourquoi. Cette distribution est-elle intéressante selon vous pour cette étude ?

$\pi_0 \mathbb{P} = \pi_0$ Dans ce modèle une molécule de phosphore sortie de l'écosystème n'y retourne pas. Ça n'est pas très intéressant. On peut aussi se demander ce qui va rester comme phosphore dans l'écosystème à la longue dans ce modèle.

← C'est l'exemple traité dans le cours 4

Exercice 2. : On étudie une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de 3 ans. On ne considère que la sous population formée des individus femelles et on suppose que chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seul un rongeur sur deux survit au dela de sa première année et seul 40% de ceux qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.

1. En désignant respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles, des femelles préadultes (rongeurs de 1 an) et des femelles adultes (rongeurs de 2 ans), écrire le système dynamique modélisant cette population de rongeurs :

$$\begin{cases} j_{t+1} &= 6\,p_t + 10\,a_t \\ p_{t+1} &= 0{,}5\,j_t \\ a_{t+1} &= 0{,}4\,p_t \end{cases} \qquad (1)$$

2. Réécrire le système sous forme matricielle en indiquant quelle est la matrice de Leslie L du système.

$$\begin{pmatrix} j_{t+1} \\ p_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de Leslie } L \text{ du système}} \begin{pmatrix} j_t \\ p_t \\ a_t \end{pmatrix}$$

3. Pour une population initiale de 10 femelles adultes, calculer l'évolution des effectifs selon ce modèle à l'instant $t = 1$, puis à l'instant $t = 2$.

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ p_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 0 + 6\times 0 + 10\times 10 \\ 0{,}5\times 0 + 6\times 0 + 0\times 10 \\ 0\times 0 + 0{,}4\times 0 + 0\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_2 \\ p_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} j_1 \\ p_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 100 + 6\times 0 + 10\times 0 \\ 0{,}5\times 100 + 0\times 0 + 0\times 0 \\ 0\times 100 + 0{,}4\times 0 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. On demande à un logiciel de calcul scientifique quelles sont les valeurs propres de L, on obtient notamment la valeur $\lambda = 2$ et le vecteur propre associé $V = (120\,; 30\,; 6)$. Vérifier que $\lambda = 2$ est bien une valeur propre à gauche de L de vecteur propre V.

$$L \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 120 + 6\times 30 + 10\times 6 \\ 0{,}5\times 120 + 0\times 30 + 0\times 6 \\ 0\times 120 + 0{,}4\times 30 + 0\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 60 \\ 12 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a bien $LV = 2V$

5. Indiquer un vecteur propre associé à cette valeur propre dont la somme des coefficients fasse 1.

$$V_1 = \frac{1}{120+30+6} V = \frac{1}{156} V = (10/13 \ , \ 5/26 \ , \ 1/26)$$

On a bien $LV_1 = L\frac{1}{156}V = \frac{1}{156}LV = \frac{1}{156}2V = 2\frac{1}{156}V = 2V_1$

6. Qu'en déduisez-vous sur le comportement asymptotique du système ?

Si la matrice L est primitive on tend vers un doublement de la population à chaque étape (modèle malthusien) et la répartition par âges tend vers la répartition donnée par le vecteur V_1.

Exercice 3. :

1. Compléter le tableau suivant et en déduire les valeurs des variances et covariances demandées :

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	6	6	36	36	36
2	6	7	36	49	42
3	7	6	49	36	42
4	8	4	64	16	32
5	10	2	100	4	20
6	10	1	100	1	10
Moyenne :	7,83	4,33	64,17	23,67	30,33

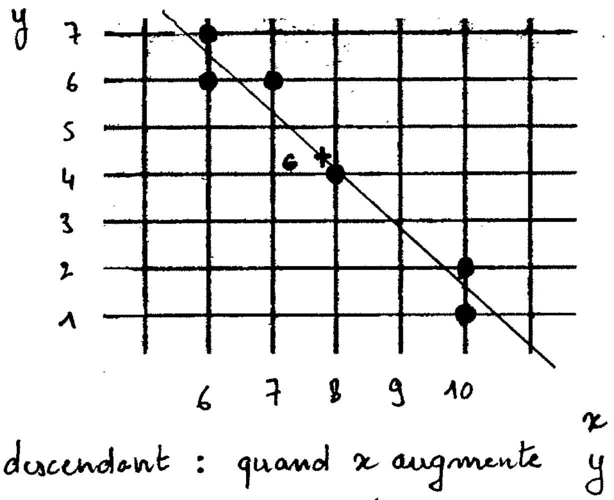
$Var(x) = m(x^2) - (m(x))^2 = 64,17 - 7,83^2 = 2,86$

$Var(y) = m(y^2) - (m(y))^2 = 23,67 - 4,33^2 = 4,92$

$cov(x,y) = m(xy) - m(x)m(y) = 30,33 - 7,83 \times 4,33 = -3,57$

$Var(x) =$ 2,86	$Var(y) =$ 4,92	$cov(x,y) =$ -3,57

2. Tracer le nuage de points (x_i, y_i) et en déduire une justification du signe de la covariance obtenue.



Le nuage est descendant : quand x augmente y diminue ce qui justifie que cov(x,y) soit négative.

3. Calculer les coordonnées de son centre de gravité G et ajouter ce point sur le dessin (en utilisant un autre symbole que celui des autres points du nuage).

$$G = (m(x), m(y)) = (7,83 \ ; \ 4,33)$$

4. Déterminer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, l'équation de la droite de régression de y en x.

C'est la droite $y = \hat{a}x + \hat{b}$ où

$$\hat{a} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} = \frac{-3,57}{2,86} \simeq -1,25$$

$$\hat{b} = m(y) - \hat{a}\, m(x) = 4,33 - (-1,25) \times 7,83$$

$$\simeq 14,12$$

$\boxed{y = -1,25\,x + 14,12}$

5. Tracer cette droite sur le graphique. Passe-t-elle par G ? Expliquez pourquoi.

Oui elle passe par G car si l'abscisse du point sur la droite vaut $m(x)$ alors son ordonnée vaut $\hat{a}\, m(x) + \hat{b} =$

$\hat{a}\, m(x) + (m(y) - \hat{a}\, m(x)) = m(y)$

La droite passe par le point $(m(x), m(y)) = G$

6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire ; commenter. $\boxed{\rho(x,y) = -0,95}$

$$\rho(x,y) = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)\,\mathrm{Var}(y)}} = \frac{-3,57}{\sqrt{2,86 \times 4,92}}$$

$$\simeq -0,95$$

$\rho(x,y)$ est très proche de -1. La représentation du nuage par la droite de régression est de très bonne qualité.