Cours 8 : Initiation à l'optimisation linéaire

L'optimisation linéaire en général a pour but de déterminer s'il existe des points $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant un ensemble d'inéquations aussi appelées *contraintes*, par exemple

$$\begin{array}{rcl} 0,31x_1 + 5,3x_3 - 3x_5 & \leqslant & 18,2 \\ 12,8x_2 - 3x_3 + 5,7x_4 & \geqslant & 3,5 \\ -3x_1 + 2,5x_2 - 4,3x_4 & \leqslant & 1,3 \end{array}$$

et si c'est le cas de chercher pour quels points une quantité $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ est maximal (ou minimal).
On va traiter de problèmes à seulement deux inconnues. Pour cela des rappels semblent nécessaires.

Équations de droites

Les équations de droites peuvent se présenter de plusieurs façons.

1. Celle dont vous avez le plus l'habitude est $y = ax + b$. La variable y est présentée comme fonction de x. Le coefficient a est la pente et b l'ordonnée à l'origine.
   Exemple : $y = -2x + 3$, lorsque x augmente de 1 y diminue de 2 (pente), en 0 y vaut 3.
   Inconvénient : les droites verticales ne peuvent pas se représenter de cette façon mais par $x = c$.
2. Les équations de la forme $ax + by + c = 0$ ont l'avantage de permettre de représenter toutes les droites. Si $b \neq 0$ on peut retrouver la forme précédente en faisant $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
   Inconvénient : l'équation n'est pas unique, $2x - 3y + 4 = 0$ et $4x - 6y + 8 = 0$ représentent la même droite.
3. Il peut être préférable de mettre l'équation sous la forme $ax + by = c$ lorsque la quantité $ax + by$ a un sens dans le problème.

Points et droites

La droite est l'ensemble des points (x, y) qui vérifient l'équation quelque soit la forme de celle-ci. Savoir si un point est ou non sur la droite revient donc à regarder si ses coordonnées vérifient ou non l'équation.
Exemples :

1. le point $(4, -5)$ est sur la droite $y = -2x + 3$ car $-5 = -2 \times 4 + 3$
2. le point $(-7, 5)$ n'y est pas car $5 \neq -2 \times (-7) + 3$
3. le point $(-2, 0)$ est sur la droite $2x - 3y + 4 = 0$ car $2 \times (-2) - 3 \times 0 + 4 = 0$
4. le point $(1, 5)$ n'y est pas car $2 \times 1 - 3 \times 5 + 4 \neq 0$

Équations de droites données par des informations

Une droite peut être définie par des informations, sa pente, des points par lesquels elle passe. Comment trouver alors son équation ?

On donne **deux points** par lesquels la droite passe. Il faut s'assurer que ces points sont distincts sinon il y a une infinité de possibilités. On écrit le système d'équations correspondant à une droite de coefficients inconnus passant par ces deux points.
Exemple : on cherche une droite de la forme $y = ax + b$ passant par $(4, -5)$ et $(2, -1)$. On écrit le système $\left\{ \begin{array}{rcl} -5 & = & 4a + b \\ -1 & = & 2a + b \end{array} \right.$ d'où on tire facilement $a = -2$ et $b = 3$.
Remarque : si les deux points définissent une verticale, c'est à dire ont la même coordonnée x, on ne trouve pas de solution de cette forme puisque l'équation est de la forme $x = c$.

On donne **la pente et un point** par lequel la droite passe. C'est encore plus simple puisqu'il y a une seule équation à résoudre.
Exemple : on cherche une droite de pente -2 passant par $(4, -5)$. On sait que son équation est de la forme $y = -2x + b$ et qu'on doit avoir $-5 = -2 \times 4 + b$ donc $b = 3$.
Remarque : un exemple important de cette situation est la tangente au graphe d'une fonction en un point.

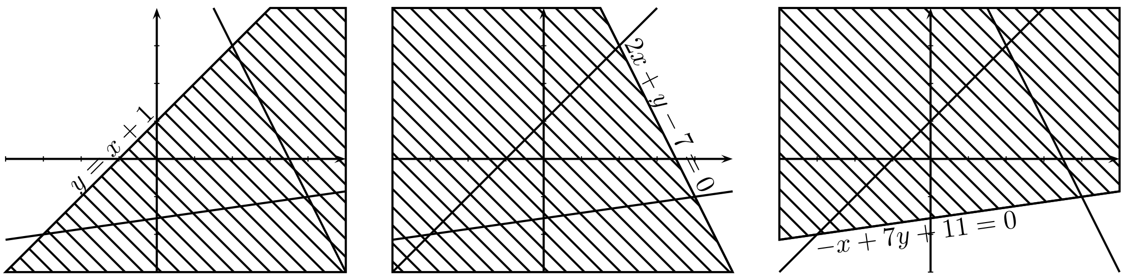
Intersection de deux droites
On peut avoir à calculer le point intersection de deux droites. On résoud le système formé des deux équations de droites. La stratégie de résolution dépend de la forme des équations (voir les exemples). Il peut n'y avoir aucune solution (droites parallèles) ou une infinité (droites confondues).
Exemple 1 : on cherche le point d'intersection des droites $y = -2x + 3$ et $y = -x - 1$. On écrit le système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -2x+3 \\ y & = & -x-1 \end{array}\right.$ d'où on doit avoir $-2x+3 = -x-1$ donc $x = 4$ et en remplaçant dans l'une ou l'autre des équations (dans les deux si on veut vérifier) on a $y = -5$.
Exemple 2 : on cherche le point d'intersection des droites $y = -2x + 3$ et $3x + 2y - 2 = 0$. On écrit le système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -2x+3 \\ 3x+2y-2 & = & 0 \end{array}\right.$ d'où on doit avoir $3x + 2(-2x + 3) - 2 = 0$ donc $x = 4$ et en remplaçant dans l'une ou l'autre des équations $y = -5$.
Exemple 3 : on cherche le point d'intersection des droites $2x+3y+7 = 0$ et $3x+2y-2 = 0$. On écrit le système $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y+7 & = & 0 \\ 3x+2y-2 & = & 0 \end{array}\right.$. On construit une combinaison des deux équations qui élimine l'une des variables, par exemple $3(2x+3y+7)-2(3x+2y-2) = 0$ d'où $9y+21-4y+4 = 0$ donc $y = -5$ et en remplaçant dans l'une ou l'autre des équations $x = 4$.

Demi-plans
Une droite découpe le plan en deux demi-plans. Dans chaque demi-plan les points (x, y) vérifient une inégalité obtenue à partir de l'équation de la droite en remplaçant le signe $=$ par une inégalité.
Si l'équation est de la forme $y = ax+b$ on comprend facilement que dans le demi-plan supérieur on a $y > ax+b$, les points sont plus hauts que ceux de la droite, et dans le demi-plan inférieur on a $y < ax + b$, les points sont plus bas que ceux de la droite.
Si l'équation est de la forme $ax + by + c = 0$ le plus simple est de choisir un point à tester pour savoir où est le demi-plan $ax + by + c > 0$ et le demi-plan $ax + by + c < 0$.
On peut maintenant chercher les points qui satisfont un système d'inéquations.

Exemple : on cherche les points (s'il y en a) solutions du système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & \leqslant & x+1 \\ 2x+y-7 & \leqslant & 0 \\ -x+7y+11 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

On commence par chercher les demi-plans correspondant à chaque inéquation



D'où finalement leur intersection donne les points solutions du système :