

NOM :
PRENOM :

Date : 12-16 septembre 2011 .
Groupe :

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaînes de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1¹ . :

Pour étudier l'évolution au cours du temps de molécules de phosphore dans un écosystème, on considère quatre états possibles, *la molécule est dans le sol* (état s), *la molécule est dans l'herbe* (état h), *la molécule est absorbée par du bétail* (état b) et enfin *la molécule est sortie de l'écosystème considéré* (état e). On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t d'espace d'états $S = \{s, h, b, e\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Tracer, à côté de la matrice ci-dessus, le diagramme en points et flèches associé.
2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la molécule de phosphore passe de l'herbe au bétail ? du sol à l'herbe ?
3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = s, X_1 = h, X_2 = b$ en fonction de $\pi_0(s)$.
4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.
5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la molécule passe de l'herbe à l'extérieur de l'écosystème en une étape ? en deux étapes ?
6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0.4 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1 .

¹(Exercice inspiré du texte en ligne à <http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html>)

Exercice 2 On reprend l'exemple de chaînes de Markov donné dans le cours. Rappeler quelle est l'ensemble d'états S et quelle est la matrice de transition.

1. Calculer la distribution π_1 au temps $t = 1$ à partir de la distribution initiale π_0 dans les deux cas suivants $\pi_0 = (0.7, 0.2, 0.1)$ et $\pi_0 = (0.4, 0.3, 0.3)$ et, dans les deux cas, indiquer quelles formations végétales progressent et lesquelles regressent.

2. On constate qu'on s'est trompé et que la probabilité de passer de l'état *herbe* à l'état *arbuste* est en réalité plutôt 0.4 et celle de passer de l'état *herbe* à l'état *forêt* de 0.2. Quelle est la nouvelle chaîne de Markov ? Refaire la question précédente dans ce nouveau modèle.