NOM : CORRIGÉ

PRENOM :

Date : Semaine du 30 Janvier 2012

Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 1
Le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. : On observe simultanément une population de renards et une population de lapins se partageant un même territoire. On modélise leur dynamiques respectives $R(t)$ et $L(t)$ (effectifs exprimés dans des unités adhoc) par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} &= 2L(t) - 0,1L(t)R(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -30R(t) + 0,05L(t)R(t) \end{cases} \quad (1)$$

1. Indiquer le sens des 4 coefficients apparaissant dans ce système.

2 est le taux de croissance des proies, les lapins, d'où le +

30 est le taux de décroissance des renards en absence de lapins d'où le −

0,1 est un coefficient d'interaction lapin-renard qui tourne mal pour les lapins d'où le −

0,05 est un coefficient d'interaction renard-lapin bénéfique aux renards d'où le +

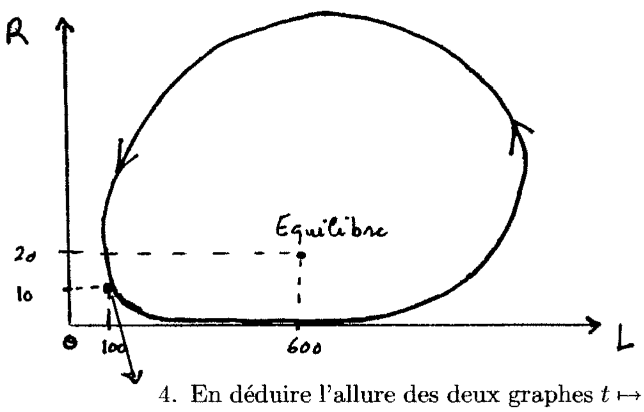
2. Calculer $\frac{DL}{dt}$ et $\frac{DR}{dt}$ au point (600 ; 20). Que pouvez-vous en déduire pour la solution $(L(t)\,;R(t))$ issue de ce point ?

$\boxed{\frac{dL}{dt}\Big|_{(600,20)} = 2\times 600 - 0,1\times 600\times 20 = 0}$ $\boxed{\frac{dR}{dt}\Big|_{(600,20)} = -30\times 20 + 0,05\times 600\times 20 = 0}$

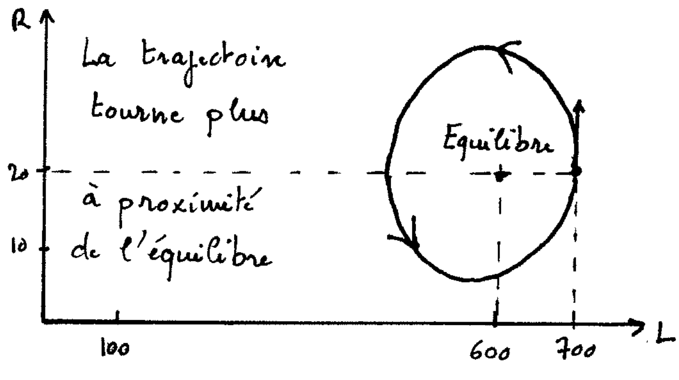
Le point (600,20) est un point d'équilibre : si $L(t_0)=600$ et $R(t_0)=20$ alors $L(t)=600$ et $R(t)=20$ pour tout t. La solution est constante.

3. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, les populations de lapins $L(t)$ et de renards $R(t)$ valent respectivement $L(0) = 100$ et $R(0) = 10$. Quelle sera selon ce modèle la dynamique de ces deux populations (on tracera l'allure de la trajectoire correspondante dans le plan LR) ? Même question pour $L(0) = 700$ et $R(0) = 20$.

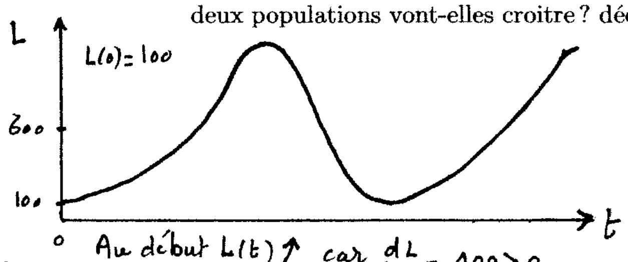
$\frac{dL}{dt}\Big|_{(100,10)} = 100$ $\frac{dR}{dt}\Big|_{(100,10)} = -250$



$\frac{dL}{dt}\Big|_{(700,20)} = 0$ $\frac{dR}{dt}\Big|_{(700,20)} = 100$



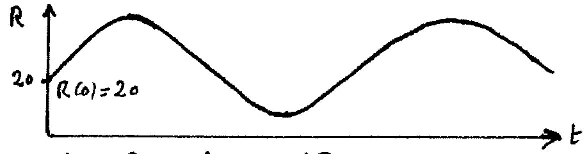
4. En déduire l'allure des deux graphes $t \mapsto L(t)$ et $t \mapsto R(t)$ comme fonction de t. A court terme, ces deux populations vont-elles croitre ? décroitre ? Expliquer.



Au début $L(t) \nearrow$ car $\frac{dL}{dt} = 100 > 0$

Au début $L(t)$ a fini de $\nearrow$ et va commencer à $\searrow$ $dL/dt = 0$

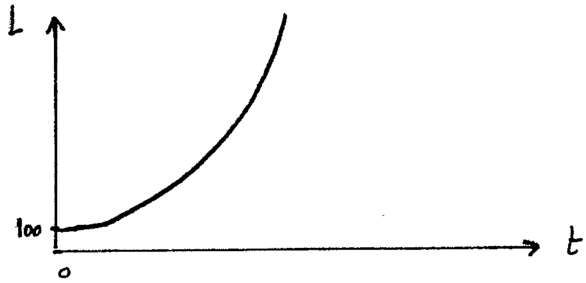
Au début $R(t) \searrow$ car $\frac{dR}{dt} = -250 < 0$



Au début $R(t) \nearrow$ car $\frac{dR}{dt} = 100 > 0$

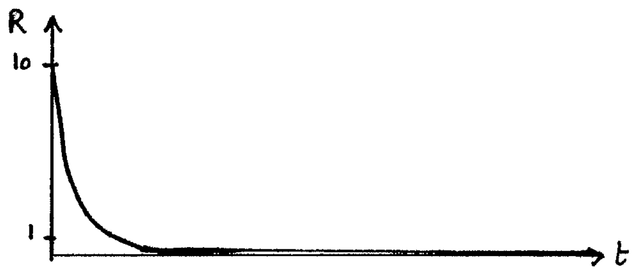
5. Calculer la dynamique des lapins en l'absence de renards dans le cas où $L(0) = 100$. Esquissez le graphe de cette solution. Comparez avec celui de la question précédente.

$L'(t) = 2\,L(t)$ avec $L(0) = 100$ donc $L(t) = 100\,e^{2t}$. On a une dynamique malthusienne avec une croissance exponentielle des lapins irréaliste à long terme. Dans la question précédente on a une oscillation de la population de lapins autour de la valeur 600.



6. De même calculer la dynamique des renards en l'absence de lapins si l'on suppose $R(0) = 10$. Esquissez le graphe de cette solution. Comparez avec celui de la question 4.

$R'(t) = -30\,R(t)$ avec $R(0) = 10$ donc $R(t) = 10\,e^{-30t}$. On a une dynamique malthusienne et une décroissance exponentielle vers une population rapidement nulle alors que dans la question 4. on a une oscillation de la population de renards un peu en retard sur l'oscillation des lapins.



Exercice 2. : Dans le cas du modèle de Lotka-Volterra étudié dans le cours, avez-vous compris ce qui s'est passé dans l'adriatique durant la guerre qui a conduit à la diminution de la population de sardines alors que la pèche avait quasiment cessé.

La réponse est donnée à la fin du cours.

Que s'est-il passé dans l'adriatique durant la première guerre mondiale qui a pu diminuer la population de sardines et augmenter celle des requins, alors que, justement la pêche avait été presque arrêtée ? L'arrêt de la pêche a eu pour effet d'augmenter α_1, puisque la mortalité des sardines a diminué, et de diminuer α_2 pour les mêmes raisons, puisqu'on ne les pêchait plus non plus. Par ailleurs, les coefficients d'interactions β_1 et β_2 n'ont pas été modifiés par l'arrêt de la pêche. L'équilibre (qui est aussi le point autour duquel les oscillations se font) a donc été déplacé durant la période de guerre, la valeur d'équilibre des proies ayant diminué (avec α_2) et celle des prédateurs ayant au contraire augmenté.