NOM : Corrigé Date : 19-23 septembre 2011 .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 2
Distribution stationnaire d'une chaine de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. :

1. Soit une chaine de Markov à 2 états de matrice de transition $\mathbb{P}$ telle que $p_{11} = 0.9$ et $p_{21} = 0.4$. Calculer l'image π_1 par la chaine de Markov de la distribution initiale $\pi_0 = (0.2 \;\; 0.8)$.

$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ La somme des éléments d'une ligne de $\mathbb{P}$ vaut 1 donc

$p_{11} + p_{12} = 1 \quad 0,9 + p_{12} = 1$ donc $p_{12} = 0,1$

$p_{21} + p_{22} = 1 \quad 0,4 + p_{22} = 1$ donc $p_{22} = 0,6$

$\pi_1 = (0,2 \;\; 0,8) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,4 \; ; \; 0,2 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,6)$

$\boxed{\pi_1 = (0,5 \;\; 0,5)}$ Remarquons que la somme des éléments de π_1 = la somme des éléments de $\pi_0 = 1$

2. Calculer le nombre α tel que $\pi_0^* = (\alpha \;\; (1-\alpha))$ soit une distribution stationnaire. En déduire que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$; expliquez.

On cherche α tel que $(\alpha \;\; (1-\alpha)) \, \mathbb{P} = (\alpha \;\; (1-\alpha))$

$(\alpha \;\; (1-\alpha)) \, \mathbb{P} = (0,9\alpha + 0,4(1-\alpha) \; ; \; 0,1\alpha + 0,6(1-\alpha)) = (0,5\alpha + 0,4 \; ; \; -0,5\alpha + 0,6)$

On résoud donc $\begin{cases} \alpha = 0,5\alpha + 0,4 \longrightarrow 0,5\alpha = 0,4 \\ 1-\alpha = -0,5\alpha + 0,6 \longrightarrow 0,5\alpha = 0,4 \end{cases}$ Il y a une solution $\boxed{\alpha = 0,8}$

$\pi_0^* (0,8 \;\; 0,2)$ vérifie $\pi_0^* \mathbb{P} = \pi_0^* = 1 \cdot \pi_0^*$ ce qui est la définition d'un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ pour la valeur propre $\lambda = 1$ (voir le début du paragraphe 4 du cours).

3. Calculer le carré $\mathbb{P}^2$, puis les deux produits $\pi_0 \mathbb{P}^2$ et $\pi_1 \mathbb{P}$. Que constatez-vous ? Expliquez.

$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,4 & 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 \\ 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,4 & 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,6 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}}$ Remarque : la somme des éléments d'une ligne vaut toujours 1

$\boxed{\pi_0 \mathbb{P}^2} = (0,2 \;\; 0,8) \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = (0,2 \cdot 0,85 + 0,8 \cdot 0,6 \; ; \; 0,2 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,4)$

$= \boxed{(0,65 \;\; 0,35)}$

$\boxed{\pi_1 \mathbb{P}} = (0,5 \;\; 0,5) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 \; ; \; 0,5 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,6)$

$= \boxed{(0,65 \;\; 0,35)}$ même valeur que $\pi_0 \mathbb{P}^2$

En effet $\pi_0 \mathbb{P}^2 = \pi_0 (\mathbb{P}\,\mathbb{P}) = (\pi_0 \mathbb{P}) \, \mathbb{P} = \pi_1 \mathbb{P}$ On peut associer les produits comme on veut mais pas changer l'ordre des produits.

Exercice 2. :

1. Soit la matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^3$. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$, ...

$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}\,\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = matrice Identité

Donc $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}\,\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}\,Id = \mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}\,\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ $\quad \mathbb{P}^6 = \mathbb{P}\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}^3 = Id$

$\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}.\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}^8 = \mathbb{P}\,\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}^2$ $\quad \mathbb{P}^9 = \mathbb{P}\mathbb{P}^8 = Id$ $\quad$ etc ...

2. Est-il possible que l'une des puissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^k$ pour un $k \geq 1$, soit une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs, c'est-à-dire est-il possible que la matrice $\mathbb{P}$ soit primitive ?

Comme on l'a vu dans la question 1 la matrice $\mathbb{P}^k$ vaut soit $\mathbb{P}$, soit $\mathbb{P}^2$, soit l'Identité. Aucune de ces matrices n'a tous ses coefficients <u>strictement</u> positifs,

donc $\boxed{\text{la matrice } \mathbb{P} \text{ n'est pas primitive.}}$

3. Pour $\pi_0 = (\alpha \;\; \beta \;\; \gamma)$, calculer les images successives $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$, ... Qu'observez-vous ?

$\pi_1 = \pi_0\mathbb{P} = (\beta \;\; \gamma \;\; \alpha)$ $\quad \pi_2 = \pi_1\mathbb{P} = (\gamma \;\; \alpha \;\; \beta)$ $\quad \pi_3 = \pi_2\mathbb{P} = (\alpha \;\; \beta \;\; \gamma) = \pi_0$

donc $\pi_4 = \pi_3\mathbb{P} = \pi_0\mathbb{P} = \pi_1$ $\quad \pi_5 = \pi_4\mathbb{P} = \pi_2$ $\quad \pi_6 = \pi_5\mathbb{P} = \pi_0$ $\quad$ etc ...

En général $\boxed{\pi_{k+3} = \pi_k}$ ce qui est normal car

$$\pi_{k+3} = \pi_k\mathbb{P}^3 = \pi_k\,Id = \pi_k$$

4. Trouver un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ de valeur propre $\lambda = 1$.

On veut avoir $\pi_0\mathbb{P} = 1\,\pi_0$, soit $(\beta \;\; \gamma \;\; \alpha) = (\alpha \;\; \beta \;\; \gamma)$

On cherche donc les solutions du système

$$\begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = \beta \\ \alpha = \gamma \end{cases}$$

Les solutions sont donc tous les vecteurs de la forme $\boxed{(\alpha \;\; \alpha \;\; \alpha)}$

On peut prendre par exemple le vecteur $(1 \;\; 1 \;\; 1)$

Mais si on veut <u>un vecteur positif dont la somme des coefficients vaut 1</u> il faut choisir le vecteur $\boxed{(1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3)}$