NOM : Semaine du 6 Février 2012.
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Systèmes différentielles (suite)

Exercice 1. : On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourissent de la même ressource et que l'on modélise par le système suivant :

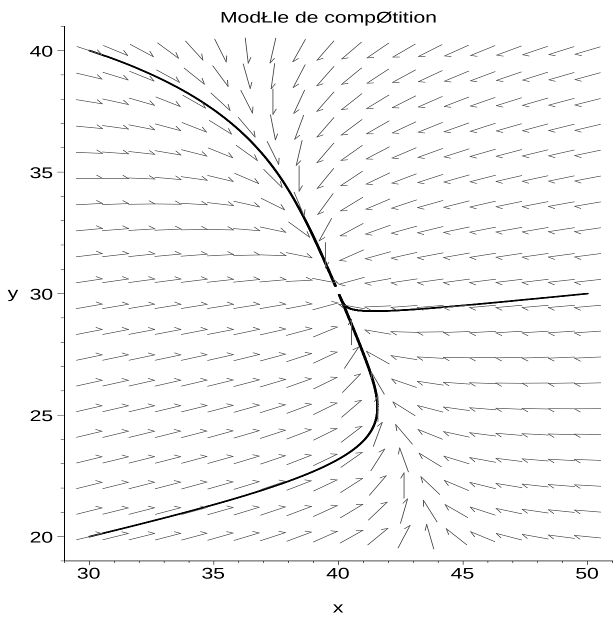
$$\begin{cases} x' &= 0,1x(3-0,06x-0,02y) \\ y' &= 0,1y(1-0,01x-0,02y) \end{cases} \tag{1}$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente.

2. Préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges (en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$) lorsque l'on a $y(0)=20$.

3. Calculer les isoclines du système et en déduire les coordonnées des quatres points d'équilibre du système.

4. Voici le dessin du champs de vecteurs associé à (1). Ajouter sur ce dessin les isoclines et vérifier que les flèches y sont bien horizontales et verticales respectivement.



5. Lequel parmi ces équilibre correspond à la coexistence des deux populations ? Expliquer.

Exercice 2. :

On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassin ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' & = & -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{array} \right. \tag{2}$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur*. On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Ecrire le système différentiel pour ce modèle en remplaçant les constantes par leurs valeurs puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et y'=0.

2. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$, tracer ces isoclines et calculer les coordonnées de l'équilibre que l'on placera sur la figure.

3. Dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé (on choisira un point dans chaque région et on calculera la valeur du champ de vecteurs en ce point). Expliquer.

4. Que peut-on en déduire sur la dynamique des deux populations de larves et de poissons lorsque t tend vers $+\infty$?

5. On observe que les deux populations tendent vers l'équilibre[1] lorsque t tend vers $+\infty$. Sur la figure précédente, tracer une trajectoire ayant ce comportement puis tracer ci dessous les graphes des deux composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution du système correspondant à cette trajectoire.

[1] Un équilibre vers lequel les trajectoires voisines tendent en spiralant est appelé un *foyer stable*.