NOM : CORRIGÉ

PRENOM :

Groupe :

Semaine du 6 Février 2012.

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Systèmes différentielles (suite)

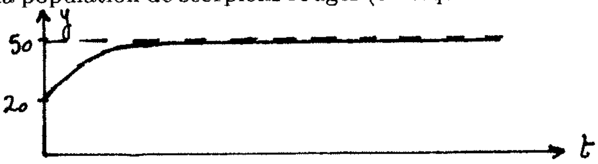
Exercice 1. **:** On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourissent de la même ressource et que l'on modélise par le système suivant :

$$\begin{cases} x' = 0,1x(3 - 0,06x - 0,02y) \\ y' = 0,1y(1 - 0,01x - 0,02y) \end{cases} \qquad (1)$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions rouges $y(t)$ lorsque l'autre population de scorpions noirs $x(t)$ est absente.

S'il n'y a pas de scorpions noirs l'équation pour les scorpions rouges devient $y' = 0,1\ y(1 - 0,02y)$ qui est un modèle logistique $y' = ry(1 - y/K)$ avec un taux de croissance intrinsèque $\boxed{r = 0,1}$ et une capacité biotique telle que $1/K = 0,02$ donc $\boxed{K = 50}$

2. Préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions rouges (en esquissant l'allure du graphe de $y(t)$) lorsque l'on a $y(0) = 20$.



$y(t)$ croît à partir de $y(0) = 20$ et tend vers 50 quand $t \to +\infty$

3. Calculer les isoclines du système et en déduire les coordonnées des quatres points d'équilibre du système.

$x' = 0$ vecteurs verticaux

Soit $\boxed{x = 0}$ c'est l'axe des y

Soit $3 - 0,06x - 0,02y = 0$ c'est à dire

$\boxed{y = \frac{1}{0,02}(-0,06x + 3) = -3x + 150}$

$y' = 0$ vecteurs horizontaux

Soit $\boxed{y = 0}$ c'est l'axe des x

Soit $1 - 0,01x - 0,02y = 0$ c'est à dire

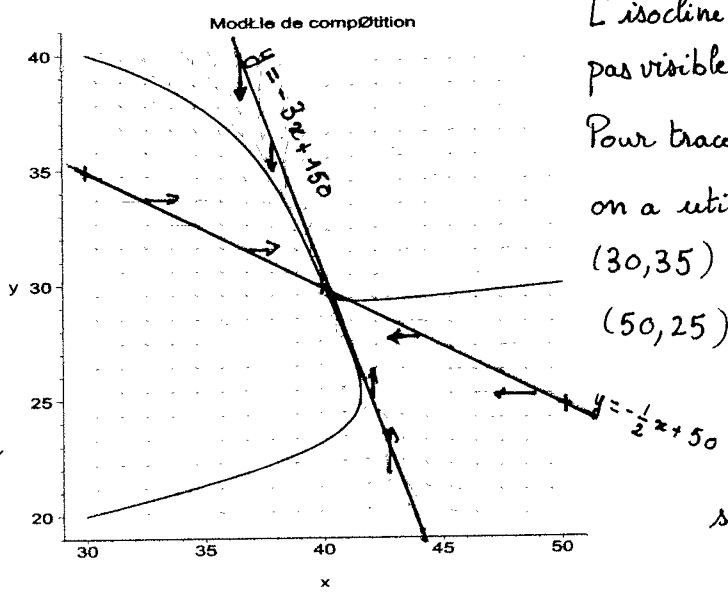
$\boxed{y = \frac{1}{0,02}(-0,01x + 1) = -\frac{1}{2}x + 50}$

4. Voici le dessin du champs de vecteurs associé à (1). Ajouter sur ce dessin les isoclines et vérifier que les flèches y sont bien horizontales et verticales respectivement.

L'isocline $x = 0$ n'est pas visible sur ce dessin.

Pour tracer $y = -3x + 150$ on a utilisé les points $(36,7 ; 40)$ $(40,30)$ et $(43,3 ; 20)$.

Les flèches sont bien verticales sur cette droite



L'isocline $y = 0$ n'est pas visible sur ce dessin.

Pour tracer $y = -\frac{1}{2}x + 50$ on a utilisé les points $(30,35)$ $(40,30)$ et $(50,25)$. Les flèches sont bien horizontales sur cette droite.

5. Lequel parmi ces équilibres correspond à la coexistence des deux populations ? Expliquer.

L'équilibre $(0,0)$ est inintéressant : il n'y a personne

Les équilibres $(50,0)$ et $(0,50)$ correspondent à la disparition d'une des deux populations

Seul l'équilibre $(40,30)$ correspond à la coexistence de 40 scorpions noirs avec 30 scorpions rouges

Exercice 2. :

On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassin ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' = -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{cases} \qquad (2)$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur.* On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Ecrire le système différentiel pour ce modèle en remplaçant les constantes par leurs valeurs puis calculer les équations des deux isoclines $x' = 0$ et y'=0.

$$\begin{cases} x' = 20 - 0,04\,xy \\ y' = -0,75y + 0,03\,xy \end{cases}$$

$\underline{x' = 0 \text{ vecteurs verticaux}}$

$20 - 0,04\,xy = 0$

$\boxed{y = \dfrac{20}{0,04x} = \dfrac{500}{x}}$

$\underline{y' = 0 \text{ vecteurs horizontaux}}$

$y(-0,75 + 0,03\,x) = 0$ donc

Soit $\boxed{y=0}$ axe des x

Soit $-0,75 + 0,03\,x = 0$ donc $\boxed{x = 25}$ droite verticale

2. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$, tracer ces isoclines et calculer les coordonnées de l'équilibre que l'on placera sur la figure.

Pour l'équilibre on doit avoir $x' = 0$ et $y' = 0$. Comme on ne peut pas avoir $y = 0$ il y a une seule solution : $x = 25$ et $y = \frac{500}{x}$ donc $y = \frac{500}{25} = 20$. L'équilibre est le point $\boxed{(25,20)}$

3. Dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champ de vecteurs associé (on choisira un point dans chaque région et on calculera la valeur du champ de vecteurs en ce point). Expliquer.

Point $(10,10)$
$x' = 20 - 0,04 \times 10 \times 10 = 16 > 0$
$y' = -0,75 \times 10 + 0,03 \times 10 \times 10 = -4,5 < 0$
direction ↘

Point $(30,10)$
$x' = 20 - 0,04 \times 30 \times 10 = 8 > 0$
$y' = -0,75 \times 10 + 0,03 \times 10 \times 30 = 1,5 > 0$
direction ↗

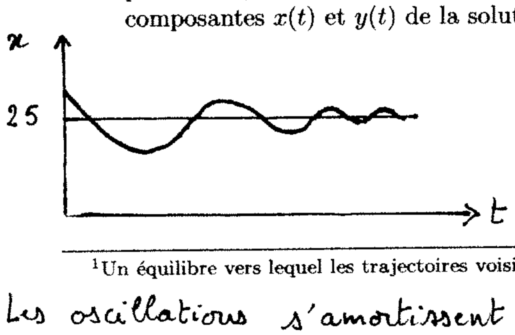
Point $(40,20)$
$x' = -12 < 0$
$y' = 9 > 0$
direction ↖

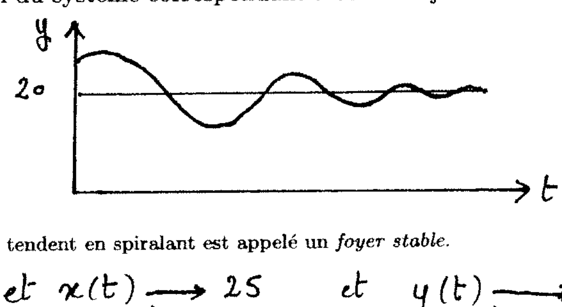
Point $(20,30)$
$x' = -4 < 0$
$y' = -4,5 < 0$
direction ↙

4. Que peut-on en déduire sur la dynamique des deux populations de larves et de poissons lorsque t tend vers $+\infty$?

La trajectoire tourne autour du point d'équilibre mais on ne sait pas si elle s'en approche ou s'en éloigne. Les deux populations $x(t)$ et $y(t)$ oscillent autour de 25 et 20 respectivement mais on ne sait pas si elles tendent vers ces valeurs quand $t \to +\infty$.

5. On observe que les deux populations tendent vers l'équilibre[1] lorsque t tend vers $+\infty$. Sur la figure précédente, tracer une trajectoire ayant ce comportement puis tracer ci dessous les graphes des deux composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution du système correspondant à cette trajectoire.





[1] Un équilibre vers lequel les trajectoires voisines tendent en spiralant est appelé un *foyer stable.*

Les oscillations s'amortissent et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 25$ et $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 20$

NOM :
PRENOM :

CORRIGÉ

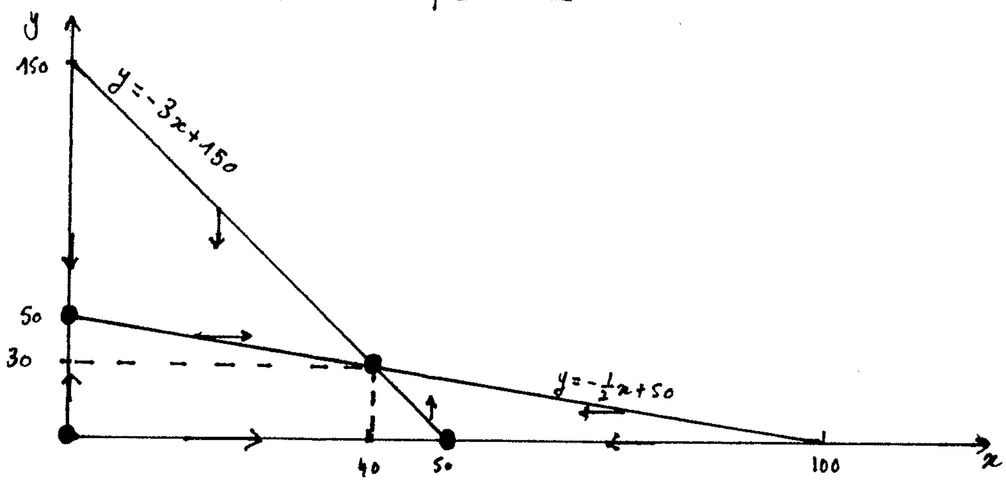
Exercice 1

3. Equilibres

Un équilibre est un point où $x'=0$ et $y'=0$. Il y a donc 4 possibilités

* Soit $x=0$ et $y=0$ point $(0,0)$ équilibre inintéressant dit "Y'a quelqu'un ?"
* Soit $x=0$ et $y=-\frac{1}{2}x+50$ donc $y=50$ point $(0,50)$ Il n'y a plus que des scorpions rouges
* Soit $y=-3x+150$ et $y=0$ donc $x=50$ point $(50,0)$ Il n'y a plus que des scorpions noirs.
* Soit $\begin{cases} y=-3x+150 \\ \text{et} \\ y=-\frac{1}{2}x+50 \end{cases}$ donc $-3x+150=-\frac{1}{2}x+50$ soit $5x=200$ d'où $x=40$ et donc $y=-\frac{1}{2}\times 40+50=30$ point $(40,30)$

4. Les isoclines et les équilibres



Exercice 2 questions 2., 3. et 5.