CORRIGÉ

NOM : Date : Semaine du 13 février 2012.

PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 3
Modèles dynamiques : autres exemples

Exercice 1. : Dans cet exercice on étudie la possibilités de coexistence de *deux populations en compétition*, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture ou le même territoire. On suppose qu'en l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suit un modèle logistique et on suppose que le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce est proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionel à leur produit).

Sous ces hypothèses, le système s'écrit

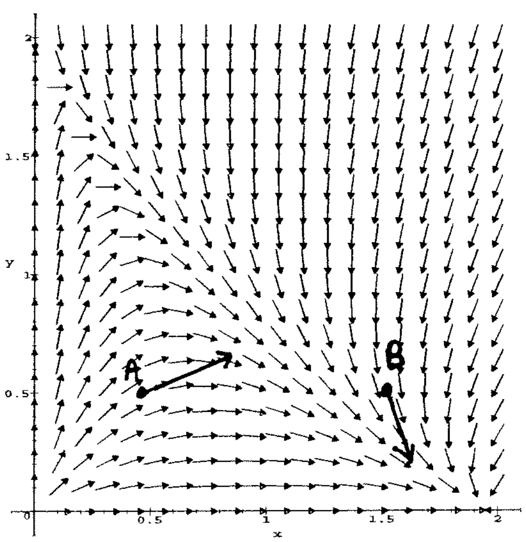
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & (1-0.5x-0.33y)x \\ y' & = & (1-x-0.5y)y \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Expliquez pourquoi ce modèle vérifie les hypothèses choisies.

Si $y=0$ alors $x'=(1-0,5x)x$ qui est un modèle logistique pour x. De même si $x=0$ $y'=(1-0,5y)y$

mortalité supplémentaire due à l'autre espèce :
pour x : $-0,33\,xy$
pour y : $-xy$
proportionelles au produit xy

2. La figure ci-dessous représente le champ de vecteurs associé à ce système. Calculer les coordonnées (x', y') du vecteur de ce champs situé au point $A = (0.5, 0.5)$ et vérifier sa direction sur la figure. Même question pour le vecteur situé au point $B = (1.5, 0.5)$.



$A = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-0,5\times 0,5-0,33\times 0,5)\,0,5 \\ (1-0,5-0,5\times 0,5)\,0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2925 \\ 0,125 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x'_B \\ y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-0,5\times 1,5-0,33\times 1,5)\,0,5 \\ (1-1,5-0,5\times 0,5)\,0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1275 \\ -0,375 \end{pmatrix}$

3. Calculer les équations de deux droites qui forment l'isocline $x' = 0$ du système (1) puis les équations de celles qui forment l'isocline $y' = 0$.

$x'=0$ vecteurs verticaux

Soit $x=0$ axe des y

Soit $1-0,5x-0,33y=0$

$y = 3-1,5x$

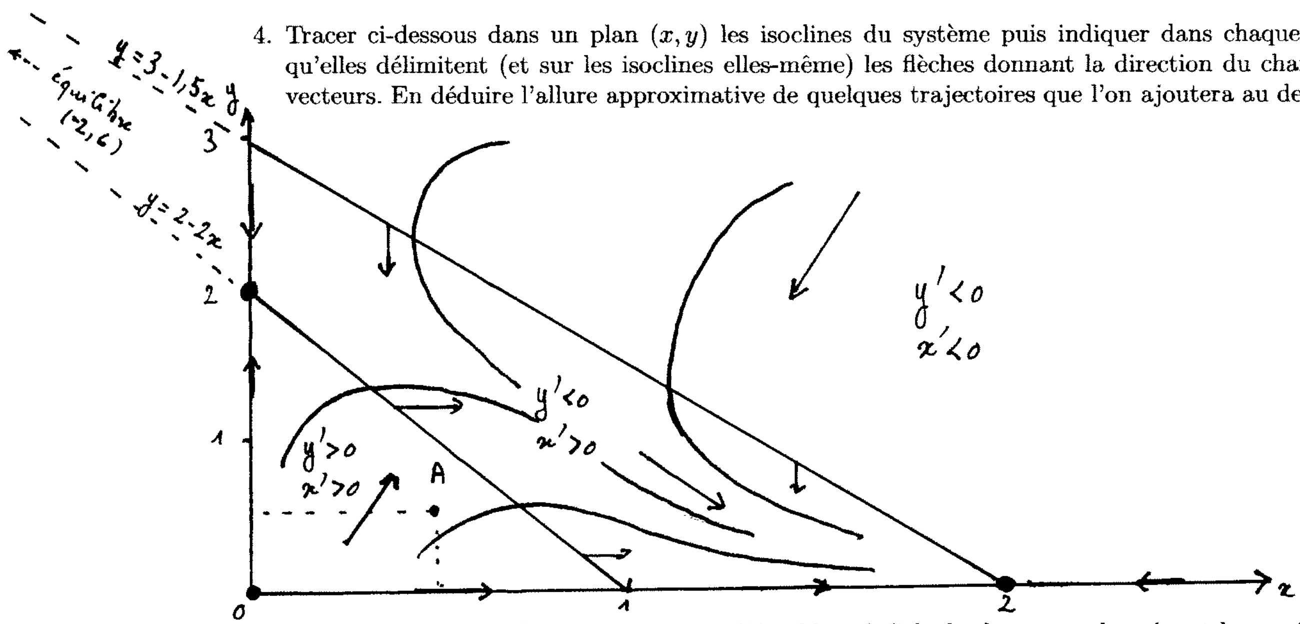
$y'=0$ vecteurs horizontaux

Soit $y=0$ axe des x

Soit $1-x-0,5y=0$

$y=2-2x$

4. Tracer ci-dessous dans un plan (x, y) les isoclines du système puis indiquer dans chaque région qu'elles délimitent (et sur les isoclines elles-même) les flèches donnant la direction du champs de vecteurs. En déduire l'allure approximative de quelques trajectoires que l'on ajoutera au dessin.



5. Combien le système (1) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées et les repérer sur la figure.

Il y a 4 points d'équilibre : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (0,0)}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (0,2)}$ $\begin{cases} y = 3 - 1,5x \\ y = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (2,0)}$

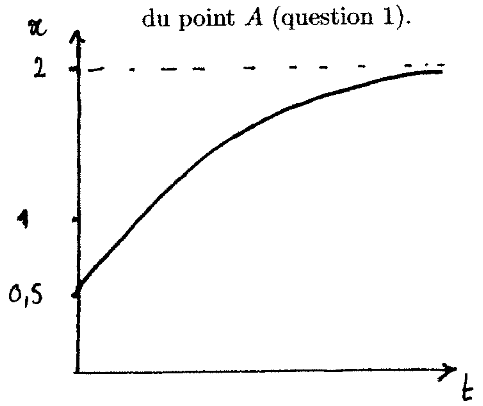
$\begin{cases} y = 3 - 1,5x \\ y = 2 - 2x \end{cases}$ $\boxed{\text{point } (-2,6)}$ qui n'a pas de sens biologique car $x < 0$

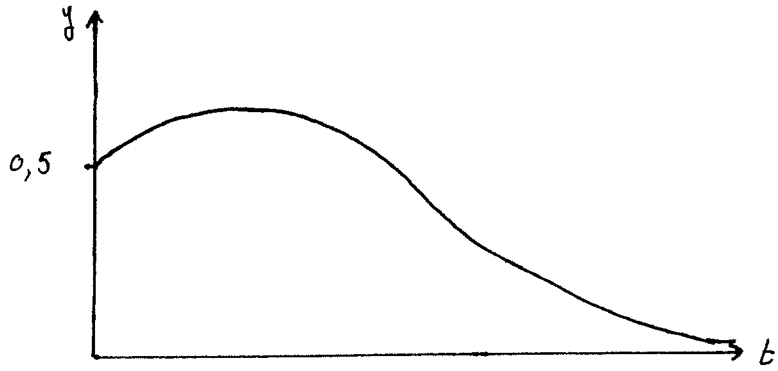
6. Que pensez-vous de l'évolution des deux populations selon ce modèle : vont-elles coexister ou l'une d'elles va-t-elle disparaître ? Expliquer.

Sauf si on part avec $x = 0$ et $y \neq 0$ auquel cas on tend vers l'équilibre $x = 0$ et $y = 2$, en général si on part avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on tend vers l'équilibre $x = 2$ et $y = 0$.

La population y va donc disparaître.

7. Tracer approximativement les graphes des deux composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (1) issue du point A (question 1).





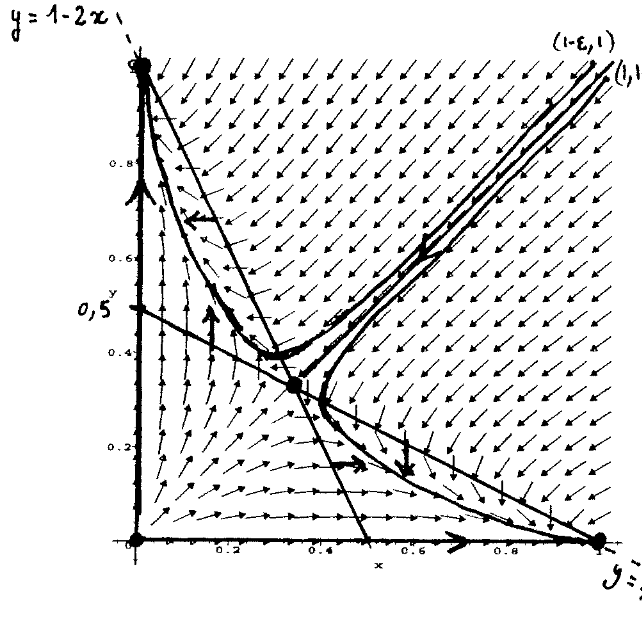
Exercice 2. :

1. La figure suivante repésente le champs de vecteurs associé à un autre système modélisant deux espèces en compétition

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (1-x-2y)x \\ y' & = & (1-2x-y)y \end{array} \right. \tag{2}$$

Ajouter sur la figure les isoclines et les points d'équilibre.

coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes



$x'=0$ vecteurs verticaux

Soit $\boxed{x=0}$ axe des y

Soit $1-x-2y=0$ droite $\boxed{y=1/2-1/2x}$

$y'=0$ vecteurs horizontaux

Soit $\boxed{y=0}$ axe des x

Soit $1-2x-y=0$ droite $\boxed{y=1-2x}$

Equilibres

$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ $\boxed{\text{Point } (0,0)}$ $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=1-2x \end{array} \right.$ $\boxed{\text{Point } (0,1)}$

$\left\{ \begin{array}{l} 1-x-2y=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ $\boxed{\text{Point } (1,0)}$

$\left\{ \begin{array}{l} 1-x-2y=0 \\ 1-2x-y=0 \end{array} \right.$ $\boxed{\text{Point } (1/3,1/3)}$

2. Parmi ces équilibres, lesquels sont attractifs, répulsifs, ni l'un ni l'autre ? Celui dont les deux composantes sont non nulles s'appelle un *col*.

L'équilibre $(0,0)$ est répulsif : à proximité on s'en éloigne.
Les équilibres $(1,0)$ et $(0,1)$ sont attractifs : à proximité on s'en approche.
L'équilibre $(1/3,1/3)$ n'est ni l'un, ni l'autre c'est un col.

3. Tracer la trajectoire issue de $(1,1)$. Peut-on parler dans ce cas de coexistence des deux populations ? Expliquer pourquoi.

La trajectoire issue de $(1,1)$ tend le long de la droite $y=x$ vers l'équilibre $(1/3,1/3)$: il y a coexistence des deux populations.

4. Même question pour les trajectoire issues des points $(1,1-\varepsilon)$ et $(1-\varepsilon,1)$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

La trajectoire issue de $(1,1-\varepsilon)$ longe la précédente puis à proximité de l'équilibre $(1/3,1/3)$ elle s'en écarte pour tendre vers l'équilibre $(1,0)$.
De même la trajectoire issue de $(1-\varepsilon,1)$ s'approche d'abord de l'équilibre $(1/3,1/3)$ puis s'en écarte pour tendre vers l'équilibre $(0,1)$.

5. Expliquer pourquoi la dynamique de ce modèle conduit en général à l'extinction de l'une des deux populations.

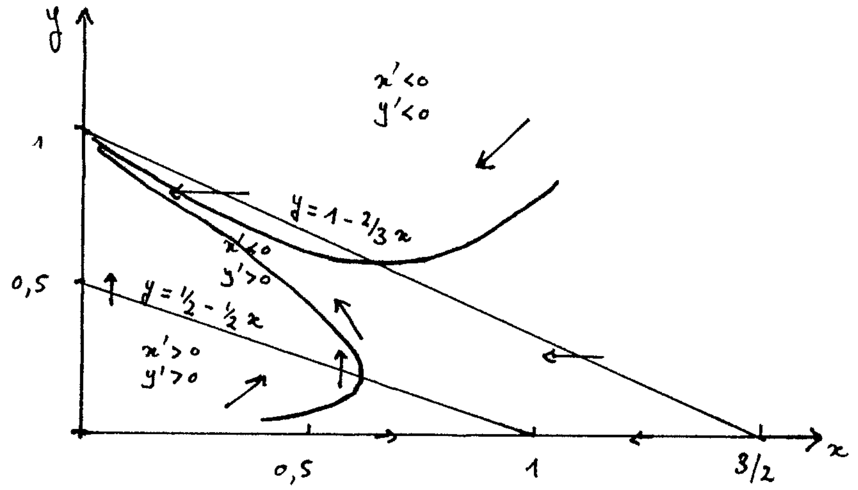
A part le cas extrêmement peu probable où $y=x$ exactement toutes les trajectoires tendent vers l'équilibre $(1,0)$, donc extinction des y, lorsqu'on part d'un $y<x$,

et vers l'équilibre $(0,1)$, donc extinction des x, lorsqu'on part d'un $y>x$.

Exercice 3. :

Dans le modèle de l'exercice précédent, on avait choisi un coefficient d'interaction entre les espèces égal à 2 dans chaque équation. L'observation de données montre que ce coefficient aurait du être plutot choisi égal à 2/3 dans la seconde équation. Cela changera-t-il, à votre avis les conclusions obtenues concernant la dynamique de ces deux populations ?

Oui : la deuxième équation devient $y' = (1 - \frac{2}{3}x - y)y$ donc l'isocline de vecteurs horizontaux $y = 1-2x$ est remplacée par $y = 1 - \frac{2}{3}x$ ce qui donne la figure suivante :



Sauf s'il n'y a pas de y, $y=0$, auquel cas on va tendre vers l'équilibre $x=1$, $y=0$

en général, $y \neq 0$, on tendra vers l'équilibre $(0,1)$: il y a $\boxed{\text{extinction des } x}$