NOM : CORRIGÉ
PRENOM :
Date : 3-7 octobre 2011.
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 1) : Feuille-réponses du TD 4
Modèles de Leslie de populations structurées en ages

Exercice 1. : On considère une population de rongeurs présentant trois classes d'ages (0-1an, 1-2ans, et 2 ans) avec un cycle de reproduction de 3 ans. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t de ces trois classes, on suppose que l'on a la dynamique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{t+1} & = & 5p_t + 10a_t \\ p_{t+1} & = & 0,4j_t \\ a_{t+1} & = & 0,5p_t \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Expliquez ce que signifient les 4 coefficients 5, 10, 0, 4 et 0, 5 qui figurent dans le modèle.

5 est le coefficient de fertilité des préadultes
10 est le coefficient de fertilité des adultes
0,4 est la probabilité de survie des jeunes
0,5 est la probabilité de survie des préadultes

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (j_0, p_0, a_0), de calculer les effectifs (j_1, p_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (j_2, p_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Voici les valeurs obtenues si les effectifs initiaux sont $j_0 = 30$, $p_0 = 50$ et $a_0 = 50$:

t	0	1	2	3	4	5	6
j_t	30	750	310	1560	2120	3740	7360
p_t	50	12	300	124	624	848	1496
a_t	50	25	6	150	62	312	424

Compléter les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

$j_1 = 5\,p_0 + 10\,a_0 = 5 \times 50 + 10 \times 50 = 750$

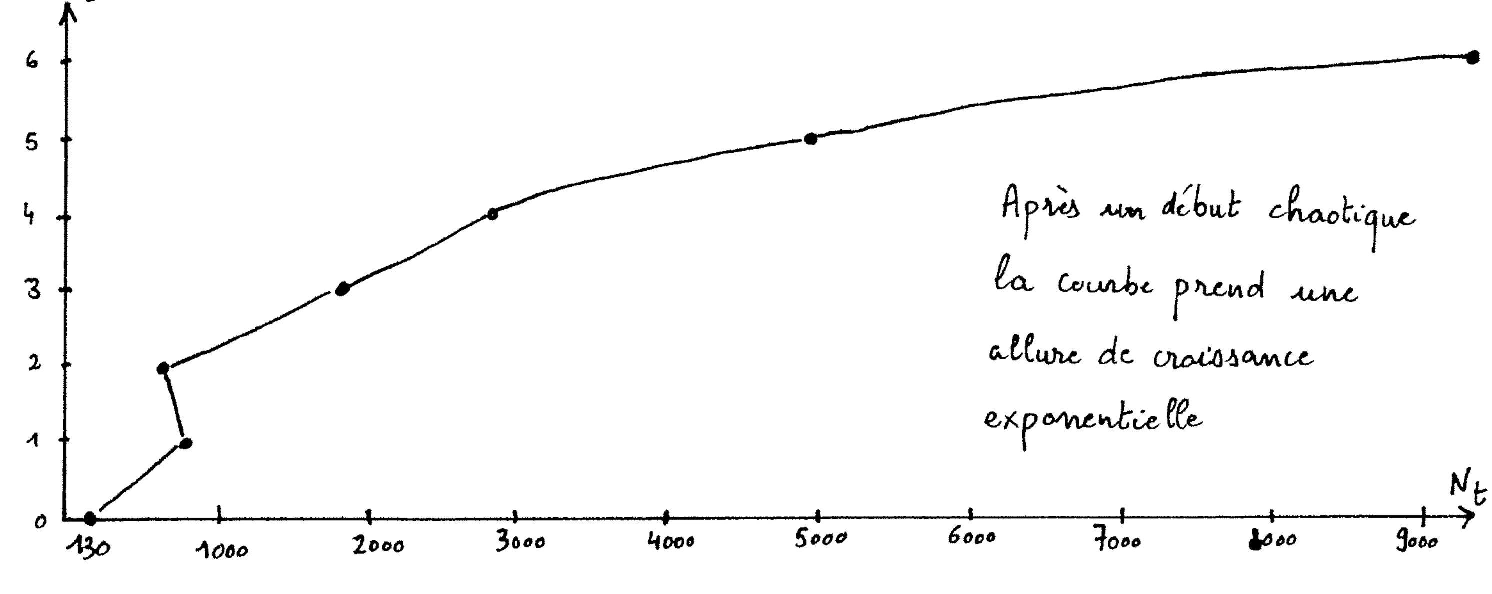
$p_3 = 0,4\,j_2 = 0,4 \times 310 = 124$

$a_4 = 0,5\,p_3 = 0,5 \times 124 = 62$

3. Si l'on désigne par $N_t = j_t + p_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (1) les termes successifs de la suite (N_t), ce qui permet d'apréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	787	616	1834	2806	4900	9280

Compléter les valeurs de $N(t)$ dans ce tableau et représenter graphiquement l'allure de la suite $(t, N(t))$. Commenter.



Après un début chaotique la courbe prend une allure de croissance exponentielle

Exercice 2. :

1. En observant cette population de rongeurs à nouveau sur plusieurs années, on constate que les effectifs ne sont pas ceux prévus par le modèle précédent mais plutot les suivants :

t	0	1	2	3	4	5	6
j_t	30	800	290	2460	2470	7960	12330
p_t	50	15	400	145	1230	1235	3980
a_t	50	20	6	160	58	492	494

On constate alors qu'en réalité on a interverti les deux probabilités de survie et une erreur s'est glissée sur l'un des coeficients de fertilité. Pouvez-vous déterminer quel modèle de Leslie correpond en fait à ces données ? Expliquer.

$a_1 = x p_0 \quad 20 = x\,50 \quad x = 0,4$

$p_1 = x j_0 \quad 15 = x\,30 \quad x = 0,5$

On a donc le système $\boxed{\begin{cases} j_{t+1} = 6\,p_t + 10\,a_t \\ p_{t+1} = 0,5\,j_t \\ a_{t+1} = 0,4\,a_t \end{cases}}$

$\begin{cases} j_1 = x p_0 + y a_0 \\ j_2 = x p_1 + y a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 800 = x50 + y50 \\ 290 = x15 + y20 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x + y = 16 \\ 3x + 4y = 58 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 6 \\ \text{et} \\ y = 10 \end{cases}$

2. On désigne par U le vecteur colonne représentant les effectifs des trois classes à l'instant $t = 1$. Calculer successivement, pour la matrice de Leslie de ce modèle, les produits LU, puis $L(LU)$, puis L^2 et enfin L^2U. Que constatez vous ?

On a $L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 800 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $LU = \begin{pmatrix} 290 \\ 400 \\ 6 \end{pmatrix} =$ vecteur colonne en $t = 2$

$L(LU) = \begin{pmatrix} 2460 \\ 145 \\ 160 \end{pmatrix} =$ vecteur colonne en $t = 3$ $=$ $L^2U = \begin{pmatrix} 3\times 800 + 4\times 15 \\ 3\times 15 + 5\times 20 \\ 0,2\times 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2460 \\ 145 \\ 160 \end{pmatrix}$

3. Ayant vérifié que cette matrice est primitive, on a calculé sa valeur propre dominante et un vecteur propre associé : on a trouvé $\lambda = 2$ et $V = (\ 0,970 \quad 0,243 \quad 0,0485\ )$. Calculer un vecteur propre, correspondant à cette même valeur propre, dont la somme des coefficients vaut 1.

La somme des coefficients de V vaut $0,970 + 0,243 + 0,0485 = 1,2615$

D'où le vecteur propre $V_1 = \dfrac{1}{1,2615} V \simeq \begin{pmatrix} 0,769 \\ 0,1926 \\ 0,0384 \end{pmatrix}$

4. Que peut-on en déduire pour la dynamique à long terme de cette population de rongeurs ? En particulier, quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différentes classes d'ages après un temps long ?

À long terme chaque classe d'age et donc la population globale tendra à doubler à chaque pas de temps.

La répartition tendra vers environ $\boxed{\text{77 \% de jeunes, 19 \% de préadultes et 4 \% d'adultes}}$

5. Dans le cas du modèle de l'exercice 1, on calcule facilement qu'on aurait eu $\lambda = 1.77$ et $V = (\ 5,95 \quad 1,345 \quad 0,38\ )$. Les conclusions auraient-elles été très différentes ? Expliquez

Pour pouvoir comparer on calcule la somme des coefficients de V :

$5,95 + 1,345 + 0,38 = 7,675$ et le vecteur propre $V_1 = \dfrac{1}{7,675} V \simeq \begin{pmatrix} 0,775 \\ 0,175 \\ 0,05 \end{pmatrix}$

Les conclusions sont très peu différentes : la population croît un peu plus lentement, elle est multipliée par 1,77 au lieu de 2 à chaque pas de temps et la répartition tend vers environ $\boxed{\text{77,5 \% de jeunes, 17,5 \% de préadultes et 5 \% d'adultes}}$