Université de Nice
NOM :
PRENOM :

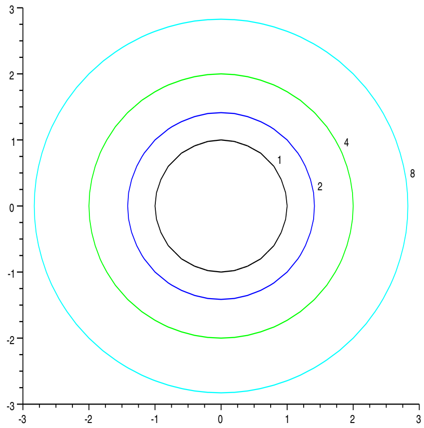
Département de Mathématiques, L1SV
Date : Semaine du 20 Février 2012
Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. : On considère la fonction f de deux variables $f(x,y) = x^2 + y^2$ dont les courbes de niveau sont représentées sur le dessin suivant.

Marquer le point M de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Quelle est l'équation de la courbe de niveau de f passant par ce point ? Quelle forme a cette courbe ? Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?

Même question au point M' de coordonnées $(-2, 2)$.



Exercice 2. :

1. Trouver le gradient de la fonction $g(x,y) = 5y + xe^{2y}$ puis calculer sa valeur au point $(0,0)$.

2. Calculer l'équation de la courbe de niveau k=0 de la fonction $h(x,y) = y - 3x^2$ puis tracer cette courbe. De même pour la courbe de niveau $k = 2$ de cette fonction.

Exercice 3. **:** On reprend à présent un exemple de système de Lotka Volterra semblable à celui étudié lors de la première séance pour étudier la loi de conservation associée à ce système qui est donnée par la fonction $H(x, y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 3x - 0.2xy \\ y' & = & -4y + 0.1xy \end{array} \right. \qquad (1)$$

1. On considère le point M de coordonnées $M = (60, 20)$. Représenter approximativement la courbe de niveau de H passant par M (en se souvenant qu'il s'agit d'une trajectoire du système).

2. Calculer le vecteur gradient de H au point M et tracer ce vecteur sur votre figure.

3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées (x', y') d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur votre figure.

4. Vérifier que le produit scalaire du vecteur gradient de H en un point (x, y) et du champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra est nul. Qu'en deduisez-vous ?