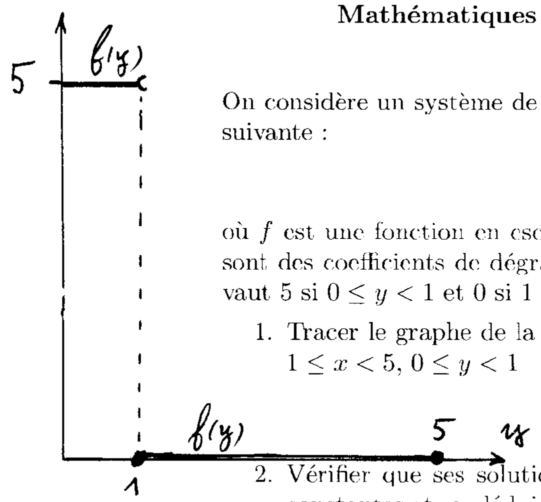
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Un modèle simplifié du switch génétique



On considère un système de 2 gènes de niveau d'exspression x et y respectivement, ayant la dynamique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & f(y) - \lambda x \\ y' & = & f(x) - \mu y \end{array}\right. \qquad (1)$$

où f est une fonction en escalier qui modélise l'inhibition de chaque gène sur l'autre gène et où λ et μ sont des coefficients de dégradation que l'on supposera égaux à 1 pour simplifier. On suppose que $f(y)$ vaut 5 si $0 \le y < 1$ et 0 si $1 \le y < 5$.

1. Tracer le graphe de la fonction f et indiquer que vaut le système différentiel (1) dans le rectangle $1 \le x < 5$, $0 \le y < 1$

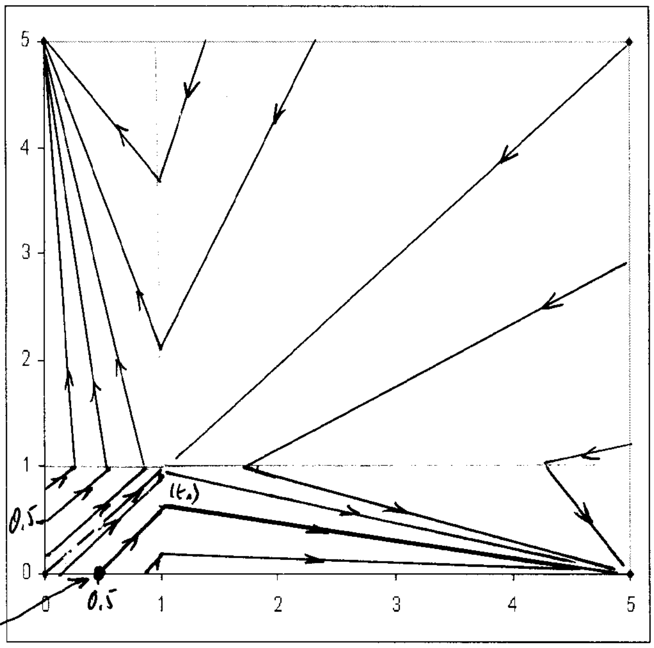
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 5 - x \quad (y \in [0,1]) \quad (\lambda = 1) \\ y' & = & -y \quad (x \in [1,5]) \quad (\mu = 1) \end{array}\right. \qquad (2)$$

2. Vérifier que ses solutions sont de la forme $(x(t) = 5 + ce^{-t}$ et $y(t) = de^{-t}$ où c et d sont des constantes et en déduire que les trajectoires sont des droites d'équation $y = \frac{d}{c}(x-5)$.

$x(t) = 5 + c\,e^{-t}$, donc $x'(t) = -c\,e^{-t}$ et $5 - x(t) = 5 - (5 + c\,e^{-t}) = -c\,e^{-t} = x'(t)$
$y(t) = d\,e^{-t}$, donc $y'(t) = -d\,e^{-t}$ et $-y(t) = -d\,e^{-t} = y'(t)$, donc $(x(t), y(t)) = (5 + ce^{-t}, de^{-t})$ est bien solution
$\frac{d}{c}(x-5) = \frac{d}{\cancel{c}}(\cancel{5} + \cancel{c}\,e^{-t} - \cancel{5}) = d\,e^{-t} = y$; les trajectoires sont donc bien des droites $y = \frac{d}{c}(x-5)$.

3. Tracer ci-dessous, en restant dans le rectangle, quelques unes de ces trajectoires.

Toutes ces droites passent par $(x,y) = (5,0)$.
$x(t) = 5 + c\,e^{-t} \longrightarrow 5$ quand $t \to +\infty$



$(x_0, y_0) = (0.5, 0)$
(question 7.)

4. Vérifier que toutes les trajectoires tendent vers le point $(5,0)$ qui est un équilibre de type noeud attractif (appelé le point focal du rectangle).

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} 5 + c\,e^{-t} = 5 + c \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 5 + c\,0 = 5$

$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} d\,e^{-t} = d \lim_{t\to\infty} e^{-t} = d\,0 = 0$

Donc toutes les trajectoires tendent bien vers $(0,0)$, comme indiqué par les flèches dessinées sur les trajectoires

5. Indiquer ce que vaut le système différentiel (1) dans le carré $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ et vérifier que ses solutions sont de la forme $(x(t) = 5 + ce^{-t}$ et $y(t) = 5 + de^{-t})$, où c et d sont des constantes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 5 - x \\ y' & = & 5 - y \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} y \in [0,1] \\ x \in [0,1] \end{array} \tag{3}$$

$x(t) = 5 + ce^{-t}$, donc $x'(t) = -ce^{-t}$ et $5 - x(t) = 5 - (5 + ce^{-t}) = -ce^{-t} = x'(t)$

$y(t) = 5 + de^{-t}$, donc $y'(t) = -de^{-t}$ et $5 - y(t) = 5 - (5 + de^{-t}) = -de^{-t} = y'(t)$

Donc $(x(t), y(t)) = (5 + ce^{-t}, 5 + de^{-t})$ est bien solution de (3)

En reprenant l'idée de la question 2, on voit que

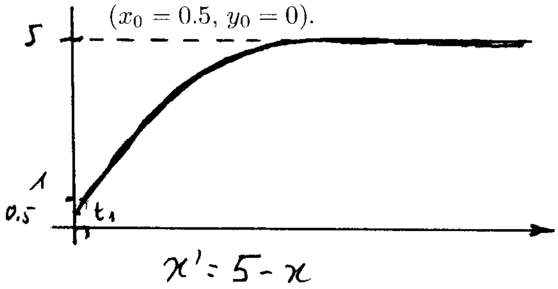
$\frac{d}{c}(x - 5) = \frac{d}{c}(\cancel{5} + \cancel{c}e^{-t} - \cancel{5}) = de^{-t}$ $(5 + de^{-t}) - 5 = y(t) - 5 = y - 5$. Donc $y - 5 = \frac{d}{c}(x - 5)$

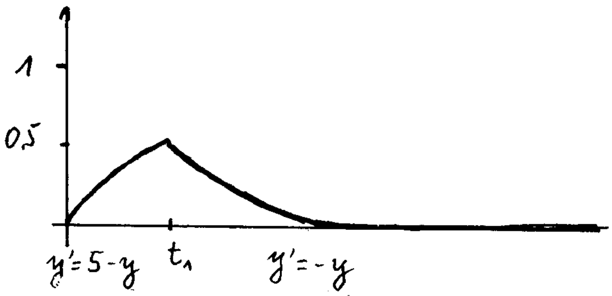
ou encore $y = \frac{d}{c}x + 5 - 5\frac{d}{c} = \frac{d}{c}x + 5(1 - \frac{d}{c})$

6. En déduire que les trajectoires dans ce carré ont aussi un point focal vers lequel elles tendent et tracer, en restant dans le carré, quelques unes de ces trajectoire dans la figure ci-dessus.

$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \to +\infty} (5 + ce^{-t}, 5 + de^{-t}) = (5 + c \lim_{t \to \infty} e^{-t}, 5 + d \lim_{t \to +\infty} e^{-t}) = (5, 5)$

7. Tracer les graphes $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ des deux composantes de la trajectoire issue du point $(x_0 = 0.5, y_0 = 0)$.





8. Reprendre les questions précédentes pour le rectangle et la carré restant et compléter le tracé des trajectoires dans la figure ci-dessus.

Dans le rectangle $[0,1] \times [1,5]$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = 5 - y \end{array}\right.$$

En s'inspirant de 2 et 5 on voit que les solutions sont

$x(t) = ce^{-t}$ et $y(t) = 5 + de^{-t}$

qui tendent vers $(0,5)$ sur des droites $y - 5 = \frac{d}{c}x$

Dans le carré $[1,5] \times [1,5]$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -y \end{array}\right.$$

Ici les solutions sont $x(t) = ce^{-t}$, $y(t) = de^{-t}$

qui tendent vers $(0,0)$ sur des droites $y = \frac{d}{c}x$

9. Voyez-vous pour quelle raison ce modèle porte le nom de switch ?

On voit sur le dessin que les trajectoires située sous la diagonale convergent toutes vers l'équilibre (5,0) et celles situées au dessus vers l'équilibre (0,5). Ceci correspond à une dynamique pour laquelle une légère modification de la condition initiale, si l'on part à proximité de la diagonale, conduit à un comportement différent où le 1er gène s'exprime seul, le second étant inhibé alors que c'est l'inverse dans l'autre cas ! D'où le nom de switch.