NOM : Corrigé

PRENOM :

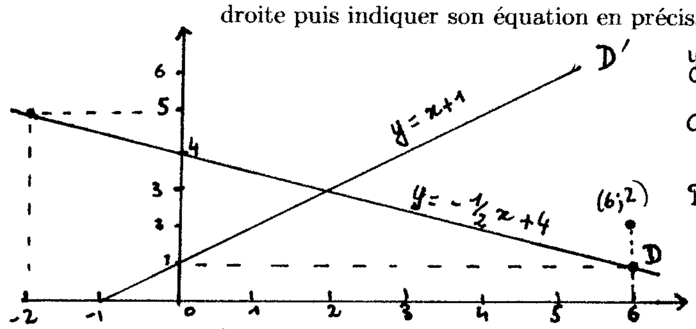
Date : 14 - 18 Novembre 2011 .

Groupe :

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Séries statistiques à une et deux dimensions

Exercice 1. :

1. On considère la droite D passant par les deux points de coordonnées $(6\,;1)$ et $(-2\,;5)$. Tracer cette droite puis indiquer son équation en précisant sa pente et son ordonnée à l'origine.



$y = ax+b$ passe par $(6,1)$ donc $1 = 6a+b$

et par $(-2,5)$ donc $5 = -2a+b$

On résoud le système $\begin{cases} 6a+b=1 \\ -2a+b=5 \end{cases}$

D'où $8a = -4$ la pente $a = -1/2$

$1+b=5$ l'ordonnée à l'origine $b=4$

L'équation de D est $\boxed{y = -\frac{1}{2}x+4}$

2. Sur le graphique précédent, tracer la droite D' d'équation $y = x+1$. Les points $(0\,;4)$ et $(1,2)$ appartiennent-ils à la droite D, à la droite D' ? Expliquer.

$(0;4)$ appartient à D car $4 = -\frac{1}{2}\times 0+4$ et n'appartient pas à D' car $4 \neq 0+1$

$(1;2)$ n'appartient pas à D car $2 \neq -\frac{1}{2}\times 1+4$ et appartient à D' car $2 = 1+1$

3. Vérifier que le point $(6\,;2)$ est *au dessus* de la droite D. Comment vérifier qu'un point $(6\,;y)$ est au dessus de D ? En dessous ?

$(6;2)$ est au dessus de D car $(6;1)$ est sur D. En général

$(6;y)$ est au dessus de D si $y > 1$

est en dessous de D si $y < 1$ est sur D si $y = 1$

Exercice 2. : On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os, le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

x=fémur	38	56	59	64	75
y=humérus	41	61	70	72	84

1. Calculer la moyenne μ_x et μ_y de chaque type d'os.

$\mu_x = \frac{1}{5}(38+56+59+64+75) = \frac{1}{5}\times 292 = 58{,}4$

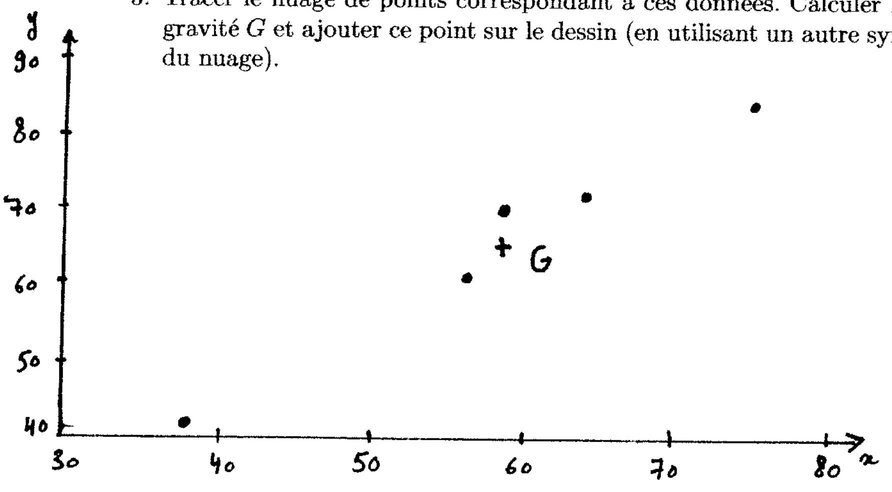
$\mu_y = \frac{1}{5}(41+61+70+72+84) = \frac{1}{5}\times 328 = 65{,}6$

2. Calculer la variance Var_x et l'écart-type σ_x des fémurs. Même question pour les humérus.

$\mathrm{Var}_x = \frac{1}{5}(38^2+56^2+59^2+64^2+75^2) - \mu_x^2 = \frac{1}{5}\,17782 - 58{,}4^2 = 145{,}84$ $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}_x} \simeq 12{,}08$

$\mathrm{Var}_y = \frac{1}{5}(41^2+61^2+70^2+72^2+84^2) - \mu_y^2 = 205{,}04$ $\sigma_y = \sqrt{\mathrm{Var}_y} \simeq 14{,}32$

3. Tracer le nuage de points correspondant à ces données. Calculer les coordonnées de son centre de gravité G et ajouter ce point sur le dessin (en utilisant un autre symbole que celui des autres points du nuage).



$G = (\mu_x\,;\mu_y)$

$= (58{,}4\,;\,65{,}6)$

Exercice 3. (covariance de deux séries) :

1. Compléter les deux tableaux suivants (dans la dernière colonne, mettre la moyenne) et en déduire les valeurs de $\mathrm{Cov}(x, y)$ et $\mathrm{Cov}(x, z)$.

						μ
x_i	1	2	4	5	7	3,8
y_i	4	3	3	1	1	2,4
x_iy_i	4	6	12	5	7	6,8

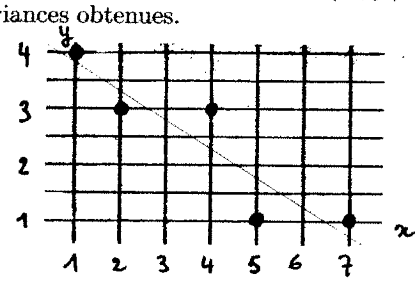
						μ
x_i	1	2	4	5	7	3,8
z_i	1	3	1	3	4	2,4
x_iz_i	1	6	4	15	28	10,8

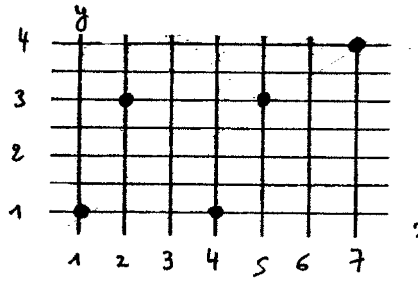
$\mathrm{Cov}(x,y) = \mu_{xy} - \mu_x \mu_y = 6,8 - 3,8 \times 2,4 = -2,32$

$\mathrm{Cov}(x,z) = \mu_{xz} - \mu_x \mu_z = 10,8 - 3,8 \times 2,4 = 1,68$

2. Tracer les deux nuages de points (x_i, y_i) et (x_i, z_i) et en déduire une justification des signes des covariances obtenues.

$\mathrm{Cov}(x,y) < 0$ le nuage est descendant





$\mathrm{Cov}(x,y) > 0$ le nuage est ascendant

Exercice 4. (transformations de la variance) :

1. On considère la série des mesures ci-dessous noté x_i et la série y_i qui en est une image par translation $y_i = x_i - \mu_c$ que l'on appelle série *centrée*. Compléter le tableau suivant (en inscrivant la moyenne μ dans la dernière colonne) et en déduire la variance des deux séries x_i et y_i.

							μ
x_i	9,3	13,2	14,2	11,7	10,3	9,8	11,42
$y_i = x_i - \mu_c$	-2,1	1,8	2,8	0,3	-1,1	-1,6	$\simeq 0$
y_i^2	4,41	3,24	7,84	0,09	1,21	2,56	3,225

la moyenne d'une série centrée est nulle mais les erreurs d'arrondi donnent 0,1

$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{6} \sum x_i^2 - \mu_x^2 = 3,149$ $\quad$ $\mathrm{Var}(y) = 3,225$

2. Comparer ces deux variances. Quelle propriété de la variance explique ce résultat ?

On a $\mathrm{Var}(x) \simeq \mathrm{Var}(y)$ à cause des erreurs d'arrondi. On a vu en cours que $\mathrm{Var}(ax+b) = a^2\,\mathrm{Var}(x)$, ici $y = x - \mu_x$ donc $a = 1$ et $b = -\mu_x$. On devrait obtenir $\mathrm{Var}(y) = \mathrm{Var}(x)$ exactement.

3. On transforme à présent la série x_i en la série $z_i = \frac{1}{2}x_i$. Calculer la variance des z_i et la comparer avec celle des x_i. Commentez.

							μ
x_i	9,3	13,2	14,2	11,7	10,3	9,8	11,42
$z_i = \frac{1}{2}x_i$	4,65	6,6	7,1	5,85	5,15	4,9	5,71
z_i^2	21,62	43,56	50,41	34,22	26,52	24,01	33,39

$\mathrm{Var}(z) = \frac{1}{6} \sum z_i^2 - \mu_z^2 = 33,39 - 5,71^2 \simeq 33,39 - 32,60 \simeq 0,79$

On applique $\mathrm{Var}(ax+b) = a^2\,\mathrm{Var}(x)$, ici $z = \frac{1}{2}x$ donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$

On devrait avoir $\mathrm{Var}(z) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(x)$

On trouve $\mathrm{Var}(z) \simeq 0,79$ et $\frac{1}{4}\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{4} \times 3,149 = 0,78725$

Toujours à cause des erreurs d'arrondi on a une égalité approximative.