

Statistiques : Enoncé du TP 4

Test d'hypothèse : cas d'une proportion

On considère une épreuve avec questionnaire à choix multiple (QCM), où sont proposées r réponses à chacune des 20 questions posées. L'objectif est de recalculer les candidats dont les réponses sont données au hasard. On fait l'hypothèse qu'un étudiant répondant au hasard choisit la réponse exacte avec une probabilité $p=1/r$ alors que les autres étudiants font un choix exact avec une probabilité strictement supérieure. On désigne par X la variable aléatoire qui, à un étudiant qui répond au hasard associe le nombre de réponses justes au QCM. La loi de X est donc une loi binomiale $B(20,p)$.

I Loi de la v.a. X.

Le tableau ci-contre donne la probabilité que la v.a. X soit inférieure ou égale à k . Ici $k=20$ et p prend les valeurs $1/3$, $1/4$, $1/5$, et $0,6$.

1. Au moyen d'Excel, reconstituer ce tableau dans un dossier appelé Test1.xls, dans les cellules A1:E23
2. Représenter les quatre courbes $(k, P(X \leq k))$ sur une même figure intégrée à la feuille de calcul, entre les lignes 1 et 23.
3. On suppose que $p=1/3$. On décide de donner l'examen à condition d'avoir au moins 10 réponses justes. Déterminer par lecture du tableau, la probabilité qu'un étudiant qui répond au hasard d'être recalé.
4. Déterminer par lecture du tableau, la probabilité qu'un étudiant qui répond au hasard d'être reçu malgré tout.
5. On appelle *hypothèse nulle* et on note H_0 l'hypothèse « $p=1/3$ » contre l'*hypothèse alternative* H_1 « $p>1/3$ » (test *unilatéral*). On se fixe un *seuil α de rejet à tort* de 5%. On décide du protocole suivant : on choisit une valeur de k telle que la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle (et donc de recevoir un étudiant répondant au hasard) soit inférieure au seuil $\alpha=5\%$. Toujours avec $p=1/3$, quelle valeur de k choisir ?

	n=20 et p=1/3	n=20 et p=1/4	n=20 et p=1/5	n=20 et p=0.6
k	P(X<=k)	P(X<=k)	P(X<=k)	P(X<=k)
0	0,000300729	0,003171212	0,011529215	1,09951E-08
1	0,003308015	0,024312625	0,06917529	3,40849E-07
2	0,017592627	0,091260432	0,206084719	5,04126E-06
3	0,060446461	0,225156048	0,411448862	4,7345E-05
4	0,151510858	0,414841503	0,629648264	0,000317031
5	0,297213894	0,617172654	0,804207785	0,001611525
6	0,479342688	0,785781948	0,913307486	0,006465875
7	0,661471483	0,898188143	0,967857337	0,021028927
8	0,809451128	0,959074832	0,990018214	0,056526367
9	0,908104226	0,986135583	0,997405173	0,127521246
10	0,962363429	0,996057858	0,999436586	0,244662797
11	0,987026703	0,999064608	0,999898271	0,404401275
12	0,996275431	0,999816296	0,999984837	0,584107062
13	0,999121193	0,999970488	0,999998155	0,749989328
14	0,999832634	0,999996187	0,99999982	0,874401027
15	0,999974922	0,999999613	0,999999986	0,949048047
16	0,999997155	0,99999997	0,999999999	0,984038837
17	0,99999977	0,999999998		1,0996388528
18	0,999999988	1		1,0999475951
19	1	1		1,0999963438
20	1	1		1

II Simulation :

1. En cellule A25 écrire la lettre p et donner aux cellules A26 à A29 les valeurs $1/5$, $1/4$, $1/3$, et $0,6$. Donner aux cellules B26 :U29 une valeur égale à 0 ou 1 avec la probabilité figurant dans la même ligne en colonne A. Donner aux cellules V26 :V 29 la somme des cellules de la même ligne dans les colonnes B à U (20 colonnes).
2. En colonne W faire figurer la valeur 0 ou 1 selon que la cellule en colonne V est strictement inférieure ou non à la valeur k trouvée à la question 5. Au moyen de la touche F9 multipliez les simulations.
3. Sur une nouvelle feuille de calcul donner à la cellule A1 la valeur $1/3$ est donner aux cellules B1 :U100 une valeur égale à 0 ou 1 avec la probabilité figurant dans la cellule A1. Dans les cellules V1:V100 faire figurer le total des colonnes B à U de la ligne. Insérer une nouvelle ligne 1 et donner aux cellules W à AB les valeurs 9, 10, 11, 12, 13, et 14. Sous ces valeurs, faire figurer la valeur 1 si le total figurant en colonne V est supérieur ou égal à 9, 10, etc., et la valeur 0 sinon. En ligne 102, inscrire le total des lignes 2 à 101 pour les colonnes W à AB. En répétant cette simulation au moyen de la touche F9, expérimenter le rejet à tort de l'hypothèse H_0 selon le choix de la note exigée.
4. Reprendre la question précédente en remplaçant le nombre r de choix par 4, puis 5.
5. Reprendre les questions 3. et 4. en remplaçant les 100 lignes par 1000 lignes.